Л.И.ТЕРЕХИНА, И.И.ФИКС

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Дистантное обучение

Томск 2008

УДК 517
ББК 22
Т 35

Терехина Л.И., Фикс И.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие, дистантное обучение. Издательство ТПУ. Томск, 2008.-168с.

Пособие является составной частью комплекта учебных пособий, подготовленных авторами по всему курсу высшей математики для технических ВУЗов, и предназначено для студентов как очной, так и заочной формы обучения.

Пособие состоит из четырех разделов: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

Каждая глава пособия содержит необходимые теоретические сведения для усвоения основных понятий, а также большое количество методически разобранных примеров решения систем линейных уравнений, действий с векторами, построения геометрических образов на плоскости и в пространстве и многих других задач, позволяющих студенту уяснить основные понятия данной части курса и приобрести необходимые навыки в решении типовых практических заданий. Решения задач сопровождаются необходимыми иллюстрациями. Наиболее часто используемые формулы сведены в таблицы.

Пособие, несомненно, окажет помощь студентам при выполнении ими контрольных работ и индивидуальных заданий по данной части курса высшей математики.

Р е ц е н з е н т
Попов Л.Е. – доктор физ.-мат.наук, профессор ТГАСУ.

Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определители и их вычисление

1.1.1. Понятие определителя

Определение. *Числовым определителем порядка n называется число, записанное в виде квадратной таблицы и вычисляемое из элементов этой таблицы по определенному правилу.*

Определитель обозначается символами $\Delta_n A$ или $\det A$.

Строки и столбцы определителя называются его *рядами*. В определителе различают главную и побочную диагонали.

Главная диагональ образована элементами, стоящими на линии, соединяющая левый верхний элемент с правым нижним.

Побочная диагональ образована элементами, стоящими на линии, соединяющая левый нижний элемент с правым верхним.

Определение. *Минором элемента a_{ij} определителя порядка n называется определитель порядка $n-1$ полученный из элементов данного после вычеркивания из него строки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых стоит этот элемент.*

Минор обозначается символом M_{ij}. Например, в определителе

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 7 & 12 \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}. \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что определитель 3-го порядка имеет 9 миноров 2-го порядка.

Определение. *Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, взятый со своим, или противоположным знаком согласно правилу*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Если сумма номеров строки и столбца данного элемента четная, то алгебраическое дополнение и минор элемента совпадают, а если эта сумма нечетная, то алгебраическое дополнение и минор имеют одинаковую величину, но разные знаки. Например, для рассмотренного выше определителя

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.2. Свойства определителей

1. Определитель матрицы не изменится при ее транспонировании.

$$\det A = \det A^T.$$

Транспонирование - перемена ролями строк и столбцов матрицы. Это свойство говорит о равноправности строк и столбцов матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц равны, так как столбцы матрицы A^T являются строками матрицы A.

2. Если переставить в определителе матрицы два параллельных ряда, то определитель сменит знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Множитель, общий элементам какого-либо ряда, можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 42 \\ -1 & -8 & 3 \\ -8 & -18 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -8 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

Или обратное: чтобы умножить определитель на число, нужно умножить на это число элементы одного из рядов определителя.

4. Определитель матрицы равен нулю, если все элементы какого-либо ряда равны нулю (a)

5. Определитель матрицы равен нулю, если матрица содержит два одинаковых ряда (b)

6. Определитель матрицы равен нулю, если матрица содержит два ряда, элементы которых пропорциональны (c)

$$a)\ \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad b)\ \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 5 \\ -5 & -8 & -8 \end{vmatrix} = 0. \quad c)\ \begin{vmatrix} 21 & -15 & 18 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Видно, что элементы 1-ой строки получаются умножением элементов 3-ей строки на (-3).

7. Определитель матрицы равен нулю, если в матрице есть ряд, элементы которого представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов других рядов.

Поясним это свойство и понятие линейной зависимости на примере определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Если все элементы 1-ой строки умножить на (-1) и сложить с соответствующими элементами 2-ой строки, предварительно умноженными на 2, то получатся элементы 3-ей строки. Это значит, что третья строка есть линейная комбинация двух других.

Конечно, такую линейную комбинацию сразу не видно, но если в результате вычисления определителя получится ноль, то можно утверждать, что его ряды линейно зависимы, т.е. какой-либо ряд можно представить в виде линейной комбинации остальных.

В частности, линейно зависимыми являются два одинаковых ряда, а также два ряда, соответствующие элементы которых пропорциональны (свойства (5) и (6)).

8. Если все элементы какого-либо ряда определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно записать в виде суммы двух определителей.

9. Определитель матрицы не изменится, если все элементы какого-либо ряда умножить на отличное от нуля число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда. Например:

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left| -3\, S_1 + S_2 \right| = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -21+8 & 12-1 & -15+0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -13 & 11 & -15 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Запись $(-3\, S_1 + S_2)$ означает, что мы умножили все элементы 1-ой строки на (-3) и прибавили к соответствующим элементам 2-ой строки. При этом элементы 1-ой строки не изменятся, а изменятся только элементы 2-ой строки.

В результате получился новый определитель, но по свойству (9) его величина равна величине исходного определителя.

Это свойство является очень важными при упрощении вычисления определителя порядка равного или выше трех.

10. *Основное правило вычисления определителей.*
Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на соответствующие им алгебраические дополнения.

Это правило называется *разложением* определителя по элементам какого-либо ряда. Результат вычисления определителя не зависит от выбора ряда, по которому ведется разложение.

11. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

1.1.3. Вычисление определителей

1. **Определитель 1-го порядка** равен самому элементу
$$\Delta_1 A = \left| \, a_{11} \, \right| = a_{11}.$$

2. **Определитель 2-го порядка** вычисляется по правилу

$$\Delta_2 A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Так: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 2 + 15 = 17$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13$$

3. Определитель 3-го порядка вычисляется по универсальному правилу (разложением по элементам какой-либо строки, или столбца. Рассмотрим примеры.

• **1.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Запишем разложение определителя} \\ \text{по элемента } 2-\text{го столбца} \\ = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} = \end{vmatrix} =$

$$= (-3) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-5 \cdot 3 - 2 \cdot 7) + (4 \cdot 3 - 2 \cdot 2) + (4 \cdot 7 - 2 \cdot (-5)) = 3(-29) + 8 + 38 = -41.$$

• **2.** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Очевидно, что наиболее выгодным} \\ \text{является разложение определителя} \\ \text{по элементам } 2-\text{ой строки,} \\ \text{так как в разложении останется} \\ \text{только одно слагаемое} \\ \\ = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = \end{vmatrix} =$

$$= 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 3 \cdot (7 \cdot (-8) - 2 \cdot 5) + 0 = 3\,(-56 - 10) = 3\,(-66) = -198.$$

Если в исходном определителе нет нулей, то их можно получить, выполняя с рядами определителя различные линейные операции, а именно: умножить элементы какого-либо ряда на число и сложить с соответствующими элементами другого ряда так, чтобы при этом какой-либо элемент стал равен нулю. Согласно свойству (9) величина определителя при этом не изменится. Такие действия можно проводить необходимое число раз.

$$\bullet\ \mathbf{3}.\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4\,S_1 + S_2 \\ \text{и}\ \ 7\,S_1 + S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 13 & -18 \\ 0 & -6 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^2\cdot \begin{vmatrix} 13 & -18 \\ -6 & 30 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 13 & -18 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot(65-18) = 282.$$

Заметим, что всегда легко получить нули, если в определителе есть 1 или (-1). Если же таких элементов нет, то путем аналогичных линейных операций над рядами можно сначала получить 1 или (-1) вместо какого-либо элемента, а затем получать нули, как в приведенном выше примере.

4. Определители порядков выше 3-го вычисляются также по универсальному правилу, но с предварительным занулением элементов какого-либо ряда, кроме одного. Тогда, например, вычисление определителя 4-го порядка можно свести к вычислению одного определителя 3-го порядка.

Рассмотрим примеры.

$$\bullet\ \mathbf{4}.\quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Получим нули} & 1\cdot S_1 + S_2 \\ \text{в третьем} & (-2)\cdot S_1 + S_3 \\ \text{столбце путем.} & (-1)\cdot S_1 + S_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$\bullet\ \mathbf{5}.\quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Предварительно получим } (-1) \\ \text{единицу в четвертом} \\ \text{столбце вместо } -4. \quad S_1' = S_1 + S_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Получим нули} & S_2' = 3\cdot S_1 + S_2 \\ \text{в четвертом} & S_3' = 5\cdot S_1 + S_3 \\ \text{столбце путем.} & S_4' = -6\cdot S_1 + S_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -14 & 0 \\ -5 & 2 & -22 & 0 \\ 8 & -2 & 23 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} -3 & 1 & -14 \\ -5 & 2 & -22 \\ 8 & -2 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)(46-44) - 1(-115+176) - 14(10-16) = 17$$

- **6**. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} -2\cdot S_1 + S_2 \\ -3\cdot S_1 + S_3 \\ -4\cdot S_1 + S_4 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \text{Получим нули} \\ \text{в первом} \\ \text{столбце.} \end{matrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} -2\cdot S_2 + S_3 \\ -7\cdot S_2 + S_4 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \text{Получим} \\ \text{нули во} \\ \text{втором} \\ \text{столбце.} \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \left| \, S_3 + S_4 \, \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} =$$

Получили определитель так называемой верхней треугольной матрицы, в которой все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю. Определитель такой матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot 40 = 160.$$

Примеры для самоконтроля

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8.$ 2) $\begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 55.$

1.2. Матрицы и действия над ними

О п р е д е л е н и е. *Числовой матрицей размера* $(m \times n)$ *называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из* m *строк и* n *столбцов:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = ||a_{ij}||,$$

где i – первый индекс, показывающий номер строки, а j – второй индекс указывает на номер столбца.

Строки и столбцы матрицы называются ее *рядами*.

1.2.1. Виды матриц.

Рассмотрим основные виды числовых матриц, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем.

1. Прямоугольные матрицы размера $(m \times n)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

размер (2×4) размер (3×2)

2. Матрица - строка размера $(1 \times n)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица состоит из одной строки и n столбцов и часто называется "вектор-строка".

3. Матрица - столбец размера $(m \times 1)$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ \dots \\ -8 \end{pmatrix}.$$

| Такая матрица состоит из одного столбца и m строк и часто называется "вектор – столбцом" |.

4. Квадратная матрица порядка $n = 3$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Верхняя и нижняя треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

В верхней треугольной матрице все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю, а в нижней треугольной матрице все элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю.

6. Диагональная и скалярная матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В диагональной матрице ненулевыми являются только элементы, стоящие на главной диагонали, а в скалярной матрице все эти элементы должны быть одинаковыми.

7. Единичная матрица: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Как видно, в единичной матрице диагональные элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю.

Над матрицами можно выполнять как линейные, так и нелинейные операции.

К линейным операциям относятся:

1. Сложение (вычитание) матриц.
2. Умножение матрицы на число.
3. Линейная комбинация матриц.

К нелинейным операциям относятся:

1. Произведение матриц.
2. Возведение матрицы в целую положительную степень.

Замечание. Отметим, что в результате всех перечисленных действий над матрицами всегда получается *матрица.*

Неопределены такие действия над матрицами, как деление матриц и возведение в дробную или отрицательную степень.

1.2.2. Действия над матрицами.

1) Сложение (вычитание) матриц.

П р а в и л о: *для того, чтобы сложить (вычесть) две матрицы, нужно сложить (вычесть) их соответствующие элементы (т.е. элементы, стоящие на одинаковых местах в обеих матрицах).*

Очевидно, что складывать и вычитать можно только матрицы одного размера.

• **1**. $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 12 & -5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -11 & 13 \\ 14 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$

$$B-A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 12 & -5 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 10 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Умножение матрицы на число.

П р а в и л о: *Для того, чтобы умножить (разделить) матрицу на отличное от нуля число, нужно умножить (разделить) на это число все элементы этой матрицы.*

Аналогично можно определить обратное действие - вынесение общего множителя из всех элементов матрицы за знак матрицы.

• **2**. $-5\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -25 & -10 \\ -15 & 35 \end{pmatrix}.$

3) Линейная комбинация матриц.

Матрица C называется линейной комбинацией матриц A и B, если выполняется равенство: $C = \alpha A + \beta B$,
где α и β -коэффициенты линейной комбинации.
Эта операция, очевидно, является обобщением предыдущих. Можно составлять линейную комбинацию любого числа матриц одного размера.

$$\bullet\ \mathbf{3}.\ C = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 8 & 3 \\ -1 & -6 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -20 \\ -42 & 13 \\ 34 & -11 \\ 5 & 34 \end{pmatrix}.$$

4) Произведение матриц.

Пусть даны матрицы A размера $(m\times n)$ и B размера $(n\times p)$ и требуется найти их произведение матрицу $C = A \cdot B$.

Умножение матриц возможно, если число столбцов n матрицы A равно числу строк n матрицы B. Или: число элементов в строке матрицы A должно равняться числу элементов в столбце матрицы B. Полученная в результате умножения матрица C будет иметь размер $(m \times p)$, т.е. в матрице C столько строк, сколько их в первой матрице A и столько столбцов, сколько их во второй матрице B.

Формально это можно записать так:

$$(m \times n) \ \times (n \times p) = (m \times p).$$

Внутренние числа должны быть одинаковыми , это указывает на возможность умножения, а внешние числа дают размер матрицы C. Не следует забывать, что в общем случае $AB \neq BA$, т.е. нельзя переставлять сомножители в произведении.

П р а в и л о у м н о ж е н и я: *Элемент c_{ij} , стоящий в строке с номером i и столбце с номером j в матрице C равен сумме произведений элементов строки с номером i первой матрицы A на соответствующие элементы столбца с номером j второй матрицы B.*

- **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} (3\times 3)(3\times 2) = (3\times 2) \\ \text{Выполнять умножение} \\ \text{можно. В результате} \\ \text{получим матрицу} \\ \text{размера } (3\times 2) \end{array} \right| =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 9 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 5 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 9 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot 1 & 3\cdot 9 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 22 \\ 11 & 37 \end{pmatrix}.$$

- **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} (1\times 3)(3\times 1) = (1\times 1) \\ \text{получим матрицу, состоящую} \\ \text{из одного элемента} \end{array} \right| =$

$$= (1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3) = (13).$$

- **6.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \left| (3\times 1)(1\times 3) = (3\times 3) \right| =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

5) Возведение матрицы в целую положительную степень.

Возведение в степень есть многократное умножение, поэтому при возведении матрицы в степень мы умножаем ее саму на себя нужное число раз. Например:

$$A^2 = A\cdot A. \qquad A^3 = A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A = A\cdot A^2.$$

- **7.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -21 & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -98 \\ -147 & 294 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Обратная матрица

О п р е д е л е н и е. *Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.*

О п р е д е л е н и е. *Матрица* A^{-1} *называется обратной для невырожденной матрицы* A*, если произведение матриц* A *и* A^{-1} *равно единичной матрице*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Итак, обратная матрица существует, если исходная матрица квадратная и имеет отличный от нуля определитель.

Схема нахождения обратной матрицы.

1. Вычисляем определитель матрицы A. Если $\det A \neq 0$, делаем вывод, что обратная матрица существует.

2. Составляем союзную матрицу A^*, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.

3. Полученную матрицу транспонируем, получаем матрицу A^{*T}.

4. Все элементы матрицы A^{*T} делим на величину определителя матрицы A $\quad A^{-1} = \dfrac{A^{*T}}{\det A}$.

Нахождение матрицы, обратной данной, называется *обращением* матрицы.

З а м е ч а н и е. Отметим ряд интересных свойств.

1. Определитель произведения двух взаимно обратных матриц равен единицею; определитель обратной матрицы есть величина обратная определителю исходной матрицы.

$$\det\,(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1, \qquad \Longrightarrow \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

2. Обращение транспонированной матрицы равносильно транспонированию обратной матрицы, т.е.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3. Матрица, обратная произведению матриц, равна произведению обратных матриц, взятых в противоположном порядке

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

• **1.** Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Действуем по схеме:

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ – существует.

2) Составляем союзную матрицу: на место каждого элемента матрицы A ставится его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot |-3| = -3, \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot |4| = -4,$$
$$A_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = -2, \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1.$$

Союзная матрица $A^* = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Полученную матрицу транспонируем $A^{*T} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}{-11} = \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: Произведение $A \cdot A^{-1} = E$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3+8 & 2-2 \\ 12-12 & 8+3 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

• **2.** Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) $\det A =$
$$= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot S_1 + S_2 \\ -1 \cdot S_1 + S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 11 & 3 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0.$$

2) Составляем союзную матрицу. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A. Алгебраическими дополнениями будут

являться *миноры* элементов, взятые со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит данный элемент, четная, и с противоположным знаком, если эта сумма нечетная.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -25,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -18.$$

Итак, союзная матрица $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix}.$

3) Транспонируем союзную матрицу $A^{*T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$

4) Записываем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$

Нетрудно проверить, что для матриц справедливо : $A \cdot A^{-1} = E$.

1.2.4. Ранг матрицы

При рассмотрении свойств определителя мы отмечали, что в ряде случаев можно, не вычисляя определитель, сказать, что он равен нулю. В этих случаях утверждается, что строки (столбцы) матрицы определителя линейно зависимы. Часто линейную зависимость рядов матрицы определителя видно сразу: наличие двух одинаковых параллельных рядов; двух пропорциональных рядов; рядов, элементы которых являются суммой или разностью соответствующих элементов других рядов. Это простейшие примеры линейной зависимости.

В общем случае линейно зависимыми называются такие ряды, из которых один может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Если ни один из рядов матрицы нельзя представить как линейную комбинацию остальных, ряды матрицы являются линейно независимыми.

В дальнейшем при решении систем линейных уравнений нам потребуется решать вопрос о наличии линейно зависимых строк в матрице и о количестве линейно независимых строк. Таким образом мы подходим к понятию ранга матрицы.

О п р е д е л е н и е 1. *Максимальное число линейно независимых строк матрицы называется* **рангом** *матрицы и обозначается*

$$\text{Rang } A = R.$$

Если ранг матрицы равен числу R, это значит, что в матрице найдется хотя бы один минор порядка R, не равный нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю. Любой, не равный нулю минор порядка, равного рангу, называется базисным.

О п р е д е л е н и е 2. *Рангом матрицы называется наивысший* **порядок** *отличного от нуля минора матрицы.*

Для нахождения ранга матрицу приводят к треугольному виду, при этом используются те же приемы, что и при вычислении определителей высокого порядка. Выявляемые при этом линейно зависимые строки вычеркиваются, а по количеству оставшихся линейно независимых судят о ранге.

- Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{matrix} S_2 - 3S_1 \\ \\ S_4 - 5S_1 \end{matrix} \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

2-ая, 3-я и 4-я строки являются линейно зависимыми и любые две из них можно вычеркнуть. Останутся две линейно независимых строки, что подтверждается наличием минора 2-го порядка, не равного нулю:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Все миноры 3-го и 4-го порядка равны нулю. Вывод: Rang $A = 2$.

1.3. Системы линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}.$$

В матричной форме систему можно записать $AX = B$, где Матрица коэффициентов при неизвестных (основная матрица системы) A, матрица–столбец неизвестных X и матрица–столбец свободных членов B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$ называется расширенной матрицей системы.

Решением системы линейных уравнений называется совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в каждое уравнение системы вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает эти уравнения в верные числовые равенства.

Совместной называется система, имеющая хотя бы одно решение.

Несовместной называется система, не имеющая решений.

Определенной называется совместная система, имеющая единственное решение.

Неопределенной называктся совместная система, имеющая бесконечное множество решение.

Таким образом, при анализе и решении систем линейных уравнений ставятся и решаются следующие вопросы:

1. Является ли система совместной ?
2. Если система совместна, является ли она определенной или неопределенной ?
3. В случае определенной системы необходимо найти единственное решение.
4. В случае неопределенной системы следует записать все множество решений системы.

На вопрос о совместности системы отвечает следующая теорема.

Теорема *Кронекера - Капелли.* *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы*

$$\text{Rang } A = \text{Rang } \widetilde{A} = R.$$

Для того, чтобы ответить на второй вопрос, нужно сравнить ранг R матрицы A с числом неизвестных системы n.

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных $(R = n)$, то система имеет *единственное* решение.

Если ранг матрицы A меньше числа неизвестных $(R < n)$, то система имеет *бесконечное множество* решений.

Отметим, что обычно при решении конкретных систем линейных уравнений отдельно вопрос о совместности системы не рассматривается, так как ответ на него получается в процессе решения системы.

Рассмотрим методы решения систем линейных уравнений.

1.3.1. Метод Крамера

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы отличен от нуля. Неизвестные системы находятся по формулам Крамера $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ – главный определитель системы, т.е. определитель основной матрицы A, Δ_k – определитель неизвестного x_k, который получается при замене столбца с номером k в главном определителе на столбец свободных членов $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Итак, методом Крамера можно решать квадратные системы с отличным от нуля определителем.

- Решить методом Крамера систему $\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 6 \end{array}\right.$.

Решение. Система имеет одинаковое число уравнений и неизвестных. Найдем главный определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Заметим, что, в этом случае (как и в предыдущем), ранг основной матрицы системы равен числу неизвестных, поэтому система имеет единственное решение.

Составим и вычислим определитель для первого неизвестного x_1. Для этого в главном определителе первый столбец, соответствующий коэффициентам при x_1, заменим столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Аналогично, заменив второй столбец в главном определителе столбцом свободных членов, запишем и вычислим определитель Δ_2, а, заменив третий столбец главного определителя столбцом свободных членов, получим определитель Δ_3.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

Находим решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1.$$

Получили единственное решение системы.

Замечание. При решении методом Крамера системы 3-х уравнений с тремя неизвестными потребовалось вычислить 4 определителя 3-го порядка. При решении систем, например, 4-го порядка уже потребуется вычислять пять определителей 4-го порядка, что громоздко и нерационально. Поэтому целесообразно решать методом Крамера системы не выше 3-го порядка.

1.3.2. Матричный метод

Система линейных уравнений может быть кратко записана в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B.$$

В этом нетрудно убедиться, перемножив матрицы A и X системы и приравняв к матрице B. (Матрицы равны, если равны их соответствующие элементы.)

Решение такого матричного уравнения рассмотрено в данном пособии. Итак:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, решение системы состоит из двух этапов.

1. Нахождение матрицы, обратной основной матрице системы;

2. Умножение полученной обратной матрицы на матрицу-столбец свободных членов.

Так как нахождение обратной матрицы связано с вычислением определителя, то матричным методом можно решать системы, имеющие невырожденную основную матрицу.

Рассмотрим пример решения системы матричным методом.

- $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & -2 \end{cases}$.

Решение: a) Выписываем основную матрицу системы и находим обратную ей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Не останавливаясь на подробных вычислениях, запишем результаты основных этапов нахождения обратной матрицы.

$$1)\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0. \qquad 2)\ A^* = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ A^{*T} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \qquad 4)\ A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Находим матрицу X – решение системы: $X = A^{-1} \cdot B =$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\left| \begin{array}{l} \text{Т.е. } x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -2 \\ \text{единственное решение системы.} \end{array} \right|$.

Подставив полученное решение в каждое уравнение системы, убеждаемся в правильности полученного решения.

Замечание. Решение систем матричным методом нецелесообразно проводить для случая $n > 3$, так как при нахождении обратной матрицы, уже для матрицы 4-го порядка, придется вычислять 16 определителей 3-го порядка. Кроме того, система должна иметь одинаковое число уравнений и неизвестных и отличный от нуля определитель основной матрицы. Т.е. матричный метод имеет те же преимущества (простота решения систем невысокого порядка) и те же недостатки, что и метод Крамера.

Рассмотрим метод решения линейных систем с любым числом уравнений и неизвестных (который является универсальным)– метод последовательного исключения неизвестных или метод Гаусса.

1.3.3. Метод Гаусса

Суть метода состоит в том, что путем элементарных преобразований из всех уравнений системы, кроме первого, исключаем неизвестное x_1, далее из всех уравнений, кроме первого и второго, исключаем неизвестное x_2, и т.д. На практике принято все эти действия проводить не над уравнениями системы, а над строками расширенной матрицы. К элементарным относятся следующие преобразования:

1) умножение (деление) на число, отличное от нуля, элементов какой-либо строки;

2) сложение элементов какой-либо строки с соответствующими элементами другой строки, предварительно умноженными на ненулевое число;

2) перестановка строк матрицы;

3) вычеркивание из матрицы нулевых строк, одной из двух одинаковых строк, одной из двух пропорциональных строк, вычеркиваются строки, линейно-зависимые от других строк.

В результате элементарных преобразований получается матрица, эквивалентная исходной, т.е. матрица, имеющая такой же ранг. На ее основе составляется система, эквивалентная исходной, но более простая в решении и анализе, так как в последнем уравнении останется только одно неизвестное, в предпоследнем
два и т.д. Этот процесс называется прямым ходом метода Гаусса. Отметим, что параллельно при этом решается вопрос о совместности системы и количестве решений (единственное или бесконечное множество.)

Обратный ход состоит в следующем: из последнего уравнения находим единственное входящее в него неизвестное, подставляем полученное значение в предпоследнее уравнение и находим второе неизвестное и т.д. пока не дойдем до первого уравнения, в котором уже найдены все неизвестные, кроме одного. Таким образом получим совокупность значений неизвестных, образующих решение системы.

Рассмотрим примеры решения систем методом Гаусса.

- 1. $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 8 \\ x_1 & -3x_2 & & -6x_4 & = & 9 \\ & 2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -5 \\ x_1 & +4x_2 & -7x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{cases}.$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, поменяв сразу местами первое и второе уравнения (всегда удобно иметь единицу в левом верхнем углу матрицы). Приводим эту матрицу к треугольному виду. Получаем нули сначала в первом столбце. Для этого умножаем первую строку на (-2) и прибавляем ко второй строке. Подобную процедуру, как уже отмечалось, будем оформлять записью: $-2 \cdot S_1 + S_2$. Далее первую строку умножаем на (-1) и прибавляем к 4-ой строке $(-1 \cdot S_1 + S_4.\ )$. В третьей строке в нужном месте ноль уже есть.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} S_2' = -2S_1 + S_2 \\ S_4' = -1S_1 + S_4 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & -9 \end{array}\right) \sim S_2' = -3S_3 + S_2 \ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & -9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} S_3' = -2 \cdot S_2 + S_3 \\ S_4' = -7 \cdot S_2 + S_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & | & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & | & -15 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & | & -44 \end{pmatrix} . \sim S_3' = \frac{1}{3} S_3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & | & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & | & -44 \end{pmatrix} \sim -7 \cdot S_3 + S_4 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & | & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & | & -9 \end{pmatrix} .$$

Обсудим полученный результат.

Матрица привелась к треугольному виду (все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю). Определитель 4-го порядка не равен нулю (для треугольной матрицы он равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали), значит в системе нет линейно зависимых уравнений. Ранги матриц A и $\widetilde{A}$ равны четырем (ранг определяется наивысшим порядком отличного от нуля минора матрицы и для матриц A и $\widetilde{A}$ это один и тот же минор 4-го порядка).

Такой небольшой предварительный анализ позволяет сделать следующие два вывода:

1) система *совместна*, т.к. Rang A=Rang $\widetilde{A}$;

2) система является *определенной* т.к. ранг матрицы системы равен числу неизвестных

Согласно полученной матрице запишем систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & & -6x_4 & = & 9 \\ & x_2 & -2x_3 & +7x_4 & = & 5 \\ & & x_3 & -4x_4 & = & -5 \\ & & & -9x_4 & = & -9 \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Применим обратный ход метода Гаусса.

1) Из последнего уравнения $-9x_4 = -9$ находим $x_4 = 1$.

2) Подставляем x_4 в предпоследнее уравнение $x_3 - 4 \cdot 1 = -5$ и получаем $x_3 = -1$.

3) Полученные значения x_3 и x_4 подставляем во второе уравнение $x_2 - 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 = 5$, из которого $x_2 = -4$.

4) Из первого уравнения после подстановки всех найденных неизвестных $x_1 - 3 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 = 9$ получим: $x_1 = 3$.

Подставляя полученные значения неизвестных $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ в каждое уравнение исходной системы, мы можем убедиться, что полученное решение верно.

• 2. $$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +4x_4 & = & 2 \\ 6x_1 & -4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 15x_1 & -10x_2 & +7x_3 & +5x_4 & = & 7 \end{array}\right. .$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и будем приводить ее к треугольному виду. Хотя единицы в первом столбце матрицы нет, но числа 3,6,9,15 пропорциональны, можно элементы первого столбца занулить с помощью числа 3.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \\ 15 & -10 & 7 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} S_2' = -2 \cdot S_1 + S_2 \\ S_3' = -3 \cdot S_1 + S_3 \\ S_4' = -5 \cdot S_1 + S_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -18 & -15 & -3 \end{array}\right).$$

Видно, что 2-я, 3-я и 4-я строки матрицы пропорциональны, две из них можно отбросить. Это получилось из-за того, что соответствующие уравнения системы являются линейно зависимыми, т.е. два последних уравнения не несут новой информации о связи между неизвестными, а получаются из второго уравнения путем линейных (элементарных) операций. Отметим, что и два первых столбца линейно зависимы, но отбрасывать один из них нельзя, чтобы не потерять одно из неизвестных системы. Итак, остается матрица, эквивалентная исходной

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right). \qquad M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Сделаем необходимые выводы. Очевидно, что $\mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Rang}\ \widetilde{A} = 2$, так как в обеих матрицах можно выделить один и тот же минор 2-го порядка, не равный нулю

Итак, система совместна, но является неопределенной т.е. имеет бесконечное множество решений, т.к. ранг матрицы системы меньше числа неизвестных $\mathrm{Rang}\, A = 2 < n = 4$.

В такой ситуации для записи эквивалентной системы необходимо выбрать в матрице *базисный минор.* Таким минором может быть любой, не равный нулю, минор порядка, равного рангу матрицы. В нашем случае за базисный можно взять выписанный выше минор M_2. (Составлять базисный минор из элементов первых двух столбцов нельзя !)

В соответствии с выбором базисного минора выбираем

a) *базисные неизвестные* x_2 , x_3;

b) *свободные неизвестные* x_1 , x_4.

Базисные неизвестные остаются в левой части уравнений системы, а свободные переносятся в правую часть уравнений и входят в столбец свободных членов. Подчеркнем, что количество базисных неизвестных всегда равно рангу матрицы R, а количество свободных неизвестных равно разности числа неизвестных в системе и ранга, т.е. $(n - R)$. В нашем примере $(n - R) = 4 - 2 = 2$.

Итак, эквивалентная система будет иметь вид:

$$\left\{\begin{array}{rrcrrr} -2x_2 & +5x_3 & = & 2 & -3x_1 & -4x_4 \\ & -6x_3 & = & -1 & +5x_4 & \end{array}\right. .$$

Проводим обратный процесс: из последнего уравнения находим

$$x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4.$$

Подставляем x_3 в первое уравнение и находим x_2 :

$$-2x_2 + \frac{5}{6} - \frac{25}{6}x_4 = 2 - 3x_1 - 4x_4, \qquad x_2 = -\frac{7}{12} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{12}x_4.$$

Решение системы запишется в виде: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -7/12 + 3/2x_1 - 1/12x_4 \\ 1/6 - 5/6x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

- 3 $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -6x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & +4x_2 & +6x_3 & -5x_4 & = & 0 \\ x_1 & & +8x_3 & +7x_4 & = & 1 \end{cases}$.

Запишем расширенную матрицу, поставив на первое место последнюю строку

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} S_2' = -2 \cdot S_1 + S_2 \\ S_3' = -3 \cdot S_1 + S_3 \\ S_4' = -7 \cdot S_1 + S_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & -2 \\ 0 & 2 & -25 & -27 & -3 \\ 0 & 4 & -50 & -54 & -7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} S_3 - 2S_2 \\ S_4 - 2S_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Получили, что в матрице A можно вычеркнуть нулевую строку, ранг этой матрицы равен 3, а из расширенной матрицы эта строка не вычеркивается, т.е. ее ранг равен 4.

Вывод: система несовместна.

Кроме того, если обратиться к последней строке расширенной матрицы и записать соответствующее ей уравнение, то получим

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1.$$

Ясно, что такое уравнение не имеет смысла. Таким образом, если в системе есть противоречивое уравнение, то и вся система противоречива, т.е. несовместна.

• 4. $\begin{cases} x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & +x_3 & +3x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +9x_4 & -5x_5 & = & 0 \end{cases}$

Данная система является однородной, т.к. свободные члены всех уравнений равны 0. Такая система всегда совместна, т.к. $x_1 = x{+}2 = \ldots = x_5 = 0$ всегда является решением системы. Главный вопрос состоит в том, что имеет ли система ненулевые решения? Ответ на этот вопрос, как и для неоднородной системы, мы получим после преобразования матрицы системы. Заметим, что нулевой столбец свободных членов можно не писать, так как в ходе преобразования системы он никак менятся не будет.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} S_2 - 2S_1 \\ S_4 - S_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 10 & -6 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Три последние строки линейно зависимые, и мы вычеркиваем 3-ю и 4-ю. Получаем матрицу, эквивалентную исходной.

Выводы: поскольку остались две линейно независимые строки, то ранг матрицы равен двум : $\mathrm{Rang}\ A = 2$. Кроме того, $\mathrm{Rang}\ A = 2 < n = 5 -$ значит система имеет бесконечное множество решений.

Выбираем базисный минор. Его можно составить из любых двух столбцов, но выгоднее всего (как станет понятно позднее) взять 1-й и 3-й столбцы

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Базисных неизвестных будет два: x_1, x_3 (так как $\mathrm{Rang}\ A = 2$).
Свободных неизвестных будет три: x_2, x_4, x_5
(так как $(n - R) = 5 - 2 = 3$).

Эквивалентная система и ее решение

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_2 & +x_4 & -x_5 \\ x_3 & = & 2x_2 & -5x_4 & +3x_5 \end{cases}. \qquad X = \begin{pmatrix} -x_2 \quad +x_4 \quad -x_5 \\ x_2 \\ 2x_2 \quad -5x_4 \quad +3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

2.1.1. Общие понятия

Известно, что ряд физических величин являются векторными, для характеристики которых необходимо указывать не только их численное значение, но и направление. Геометрической моделью векторной величины является направленный отрезок, длина которого характеризует величину, а направление отрезка – направление векторной величины.

Пусть A – начало вектора, а B – его конец, тогда сам вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной* или *модулем* вектора и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. (Рис. 1.)

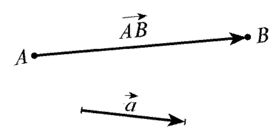


Рис. 1.

В дальнейшем будем рассматривать *свободные* векторы, для которых точка начала вектора не имеет значения, важны лишь его длина и направление. Такие векторы обозначаются одной буквой: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т.д. В этом случае длина вектора обозначается символом $|\vec{a}|$. Свободные векторы можно переносить в любую точку пространства с сохранением длины и направления.

Векторы называются:

Коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых (рис. 2). Обозначаются: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

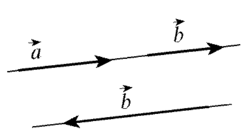


Рис. 2.

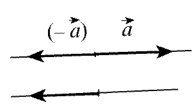


Рис. 3.

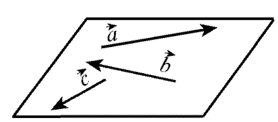


Рис. 4.

Противоположными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину, но направлены в противоположные стороны. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается: $(-\vec{a})$. (Рис. 3.)

Компланарными, если они лежат в одной или в параллельных плоскостях. (Рис. 4.)

Равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направлены в одну стороны.

Над векторами можно проводить линейные и нелинейные операции.

К линейным операциям относятся: *сложение, вычитание векторов, умножение вектора на скаляр, линейная комбинация векторов*. К нелинейным операциям относятся: *скалярное, векторное, смешанное, и двойное векторное произведения.*

2.1.2. Линейные операции над векторами в геометрической форме

1. *Сложение* двух векторов можно проводить геометрически двумя способами.

Правило треугольника: совмещаем путем параллельного переноса начало второго вектора с концом первого. Тогда суммой этих векторов будет вектор, идущий из начала первого в конец второго, т.е. этот вектор замыкает ломаную из двух векторов до треугольника. (Вектор суммы соединяет начало одного вектора с концом другого.) (Рис. 5.)

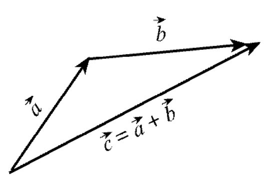


Рис. 5.

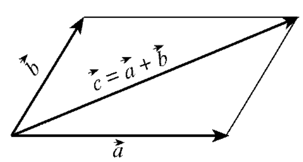


Рис. 6.

Правило параллелограмма: путем параллельного переноса совмещаем начала обоих векторов, строим на этих векторах параллелограмм. Тогда вектор диагонали этого параллелограмма, идущий из их общего начала, будет суммой векторов. (Рис. 6.)

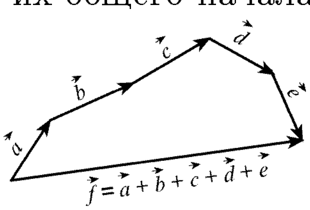


Рис. 7.

Правило многоугольника: Если требуется сложить большое число векторов, то пользуются первым способом: к концу предыдущего вектора совмещают начало следующего. В итоге вектор, идущий из начала первого вектора в конец последнего, будет являться суммой всех векторов. (Рис. 7.)

Отметим, что сумма вектора $\vec{a}$ и ему противоположного вектора $(-\vec{a})$ дает нулевой вектор $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,
такой вектор не имеет длины и направления.

2. *Вычитание* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно заменить сложением вектора $\vec{a}$ с вектором $(-\vec{b})$, противоположным вектору $\vec{b}$.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Итак, для того, чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаем начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, строим вектор $(-\vec{b})$. Находим сумму векторов $\vec{a}+(-\vec{b})$ по правилу параллелограмма. Переносим полученный вектор параллельно самому себе и получаем вектор разности, который соединяет концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем направлен из конца вычитаемого в конец уменьшаемого вектора (рис. 8.)

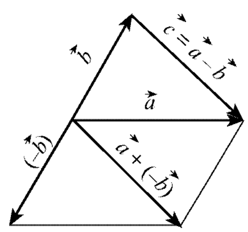


Рис. 8.

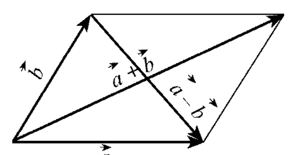


Рис. 9.

Отметим тот факт, что, если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить параллелограмм, то в этом параллелограмме вектор диагонали, выходящей из общего начала векторов-сторон, является суммой этих векторов, а вектор другой диагонали – разностью векторов сторон. (Рис. 9.)

3. *Умножение вектора на число.* Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор

$$\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a},$$

длина которого в $|\lambda|$ раз больше длины вектора $\vec{a}$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda<0$.

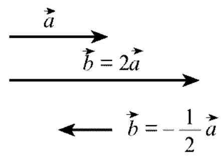


Рис. 10.

Таким образом, в результате умножения вектора на число получается вектор, коллинеарный данному. (Рис. 10.) Поэтому два коллинеарных вектора связаны соотношением

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}.$$

4. *Линейной комбинацией векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый равенством

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}.$$

Геометрически такой вектор является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha \cdot \vec{a}$ и $\beta \cdot \vec{b}$, полученных "растяжением" векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в соответствующее число раз. (Рис. 11.)

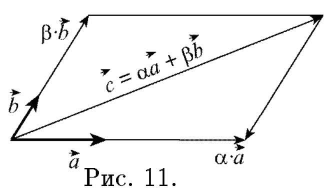


Рис. 11.

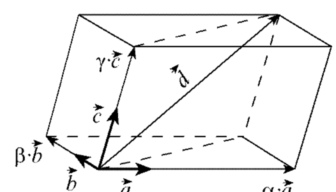


Рис. 12.

Линейной комбинацией трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будет вектор

$$\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c},$$

который является диагональю параллелепипеда, построенного на векторах $\alpha \cdot \vec{a}$, $\beta \cdot \vec{b}$ и $\gamma \cdot \vec{c}$. (Рис. 12.)

2.1.3. Базис векторного пространства

Совокупность n векторов $\vec{a}_1$; $\vec{a}_2$; ...; $\vec{a}_n = 0$ называется л и н е й н о з а в и с и м о й, если какой-либо вектор системы можно представить как линейную комбинацию остальных, т.е, к примеру,

$$\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1}$$

Условие линейной зависимости:
a) для системы из 2-х векторов: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$,
b) для системы из 3-х векторов: $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}$,
c) для системы из 4-х векторов: $\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$.

Система векторов называется *линейно независимой,* если ни один из векторов системы не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Таким образом мы подходим к одному из важнейших понятий векторной алгебры – к понятию базиса.

Р а з м е р н о с т ь ю совокупности векторов (векторного пространства) называется максимальное число линейно-независимых векторов этой совокупности.

Б а з и с о м совокупности векторов называется любая система попарно линейно-независимых векторов, количество которых равно размерности совокупности.

В пространстве коллинеарных векторов, размерность которого равна 1, базисным может служить любой ненулевой вектор. Если $\vec{a}$ базисный, то для любого $\vec{b}$ справедливо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

В пространстве компланарных векторов, размерность которого равна 2, базисным может служить любая пара неколлинеарных векторов. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ базисные, то для любого третьего вектора этого пространства $\vec{c}$ справедливо $\vec{\ } = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$.

В трехмерном векторном пространстве базисом может служить любая тройка некомпланарных векторов. Если веторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ являются базисными, то для любого вектора данной совокупности справедливо равенство

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}.$$

Последнее равенство (а также и предыдущие) называется разложением вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Числа λ_1, λ_2, λ_3 -коэффициенты линейной комбинации - называются координатами вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Отметим, что базисов в пространстве можно выбрать бесконечное множество, но, если базис выбран, то разложение вектора в этом базисе всегда является единственным.

2.1.4. Проекция вектора на ось

О п р е д е л е н и е. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l *называется длина направленного отрезка* $\overrightarrow{A'B'}$ *на этой оси, взятая со знаком "плюс," если направление* $\overrightarrow{A'B'}$ *совпадает с направлением оси* l, *и со знаком "минус", если направление* $\overrightarrow{A'B'}$ *противоположно направлению оси* l.

Проекция обозначается $\text{ПР}_l\overrightarrow{AB}$.

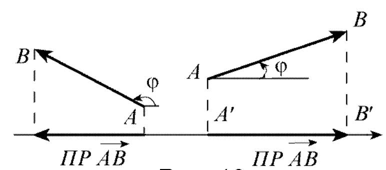


Рис. 13.

Для построения проекции вектора нужно опустить перпендикуляры из точек начала и конца вектора на эту ось. Получим на оси вектор, который, как видно из рисунка 13, может совпадать по направлению с направлением оси, а может иметь противоположное направление. Это зависит от того, острый или тупой угол образует вектор с направлением оси (Рис. 13.) Можно вычислить величину проекции, зная длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и угол, который этот вектор образует с осью.

$$\text{ПР}_l\overrightarrow{AB} = \mid \overrightarrow{AB} \mid \cdot \cos\varphi.$$

Если угол φ острый, $\cos\varphi > 0$, и проекция положительная, если угол φ тупой, $\cos\varphi < 0$, и проекция отрицательная.

Свойства проекций.

1. Равные векторы имеют равные проекции.

2. Проекция суммы векторов на одно и то же направление равна сумме проекций каждого вектора на это направление

$$\text{ПР}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{ПР}_l\vec{a} + \text{ПР}_l\vec{b} + \text{ПР}_l\vec{c}.$$

3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это число $\text{ПР}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \text{ПР}_l\vec{a}$.

2.1.5. Декартовый базис

Декартов базис в пространстве есть тройка взаимно-перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Система координат, направляющими векторами (ортами)осей которой являются $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называется декартовой прямоугольной системой координат..

Всякий вектор в пространстве может быть разложен по базисным векторам

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Числа $\{x;\ y;\ z\ \}$– есть декартовы координаты вектора и , одновременно, проекциями вектора на соответствующие оси координат.

Пишут $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ или $\vec{a} = \{x;\ y;\ z\}$

Разложение вектора в декартовом базисе на плоскости:
$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, или $\vec{a} = \{x;\ y\}$

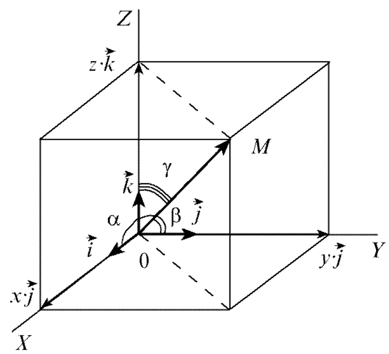


Рис. 14.

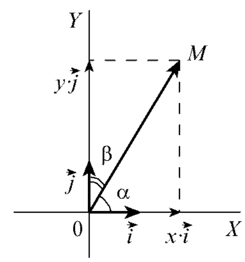


Рис. 15.

Р а д и у с о м - в е к т о р о м $\overrightarrow{OM}$ точки $M\ (x;\ y;\ z)$ называется вектор, идущий из начала координат в эту точку. Координатами радиус-вектора являются координаты точки M. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2.1.6. Линейные операции в координатной форме

Все линейные операции над векторами сводятся к точно таким же линейным операциям над их соответствующими координатами.

Пусть даны два вектора: $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$.

Равные векторы имеют равные одноименные координаты. Если $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\} = \vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то $x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2$.

1. *Сумма векторов*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\ \ y_1 + y_2;\ \ z_1 + z_2\}$.

2. *Разность векторов*: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2;\ \ y_1 - y_2;\ \ z_1 - z_2\}$.

Итак, при сложении (вычитании) векторов, заданных своими координатами, нужно сложить (вычесть) соответствующие координаты векторов.

Следствие. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами точек $A(x_1; y_1; z_1)$ – начала и $B(x_2; y_2; z_2)$ – конца вектора, равны разности одноименных координат конечной и начальной точек. (Рис. 16.)

Действительно, как видно из рисунка, вектор $\overrightarrow{AB}$ можно записать в виде разности радиус-векторов точек A и B. Координаты радиус-вектора и точки совпадают, поэтому
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1\}$.

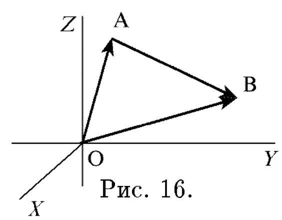


Рис. 16.

3. *Произведение вектора на число*:

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \{x_1;\ \ y_1;\ z_1\} = \{\lambda \cdot x_1;\ \lambda \cdot y_1;\ \lambda \cdot z_1\}.$$

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Следствие. Получим условие коллинеарности векторов в координатной форме.

Пусть вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$. Координаты вектора

$$\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\} = \{\lambda \cdot x_1;\ \lambda \cdot y_1;\ \lambda \cdot z_1\}.$$

Приравнивая одноименные координаты, получим

$$x_2 = \lambda \cdot x_1; \qquad y_2 = \lambda \cdot y_1, \qquad z_2 = \lambda \cdot z_1$$

$$\text{или} \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda.$$

Вывод: координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Множество всех векторов, коллинеарных данному $\vec{a}$, можно записать

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \{x;\ y;\ z\}.$$

4. *Линейная комбинация векторов*

Координаты вектора, являющегося линейной комбинацией нескольких векторов, будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов. Т.е. запись

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$$

в координатной форме будет иметь вид

$$\begin{cases} x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y_4 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z_4 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \end{cases}.$$

Таким образом, если в трехмерном векторном пространстве задан базис векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то координаты $\{\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3\}$ вектора $\vec{d}$ в этом базисе найдутся из решения этой системы.

Для плоского случая

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \end{cases}.$$

2.1.7. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Если вектор задан в декартовой системе координат, то его длина находится по теореме Пифагора.
В пространстве (рис. 14)

$$\vec{a} = \{x;\ y;\ z\}, \quad |\ \vec{a}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

На плоскости (рис. 15)

$$\vec{a} = \{x;\ y\}, \quad |\ \vec{a}\ | = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Расстояние AB между двумя точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \{(x_2 - x_1);\ (y_2 - y_1);\ (z_2 - z_1)\ \} \qquad \text{(Рис.16)).}$$

$$AB = |\ \overrightarrow{AB}\ | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2.1.8. Орт вектора. Направляющие косинусы вектора

О п р е д е л е н и е. *Ортом оси l называется вектор $\vec{l^o}$, имеющий единичную длину и направление, совпадающее с направлением оси.*

О п р е д е л е н и е. *Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^o$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, и длина равна 1.* (Рис. 17.)

$$\vec{a}^o \parallel \vec{a}, \qquad |\, \vec{a}^o \,| = 1.$$

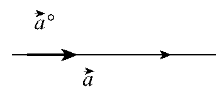


Рис. 17.

Можно записать, что $\vec{a}^o = \dfrac{\vec{a}}{|\, \vec{a}\, |}$.

Чтобы найти координаты орта, нужно разделить координаты вектора на его длину:

$$\vec{a}^o = \frac{\vec{a}}{|\, \vec{a}\, |} = \left\{ \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \frac{z}{|\vec{a}|} \right\},$$

$$\vec{a}^o = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\}.$$

Как известно, для задания вектора нужно знать его длину и направление. Как находится длина вектора в декартовой системе координат мы показали. Направление вектора задается углами α, β, γ, которые вектор образует с осями координат OX, OY, OZ соответственно. Зная координаты вектора, можно найти косинусы этих углов, которые называются направляющими косинусами вектора

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Зная длину вектора и углы, которые он образует с осями координат, можно найти координаты вектора.

Видно, что величины направляющих косинусов являются координатами орта данного вектора

$$\vec{a}^o = \{\cos\alpha;\quad \cos\beta;\quad \cos\gamma\}.$$

Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Это *основное свойство* направляющих косинусов. Используя это свойство, можно, зная углы, которые вектор образует с двумя из осей координат, определить угол, который он образует с третьей осью.

По координатам вектора можно, не вычисляя направляющих косинусов, сразу определить, острый или тупой угол этот вектор образует с соответствующей координатной осью. Например, вектор $\{-2;\ 3;\ -1\}$ образует тупые углы с осями OX и OZ и острый – с осью OY.

Если какая-либо из координат вектора равна нулю, то это означает, что вектор перпендикулярен соответствующей координатной оси. Например, вектор $\{1;\ 0;\ -2\}$ перпендикулярен оси OY.
Рассмотрим задачи векторной алгебры, связанные с линейными операциями над векторами.

2.1.9. Задачи

Задача 1. Даны две точки $A(1;-4;7)$ и $B(4;2;5)$.
Найти длину и направление вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Для решения задачи необходимо знать координаты вектора, соединяющего точки A и B. Они, как известно, равны разности соответствующих координат конечной точки B и начальной точки A:

$$\overrightarrow{AB} = \{x;y;z\} = \{4-1;\ 2-(-4);\ 5-7\} = \{3;\ 6;\ -2\}.$$

Длина вектора

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{3^2+6^2+(-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Направление вектора можно определить, вычислив направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{7},\quad \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{6}{7},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{AB}|} = -\frac{2}{7}.$$

Можно отметить, что соответствующие углы можно найти по таблицам. Углы, которые вектор образует с осями OX и OY – острые, а угол с осью OZ – тупой.

Задача 2. Даны два вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Найти векторы $(\vec{a} + \vec{b})$, $(\vec{a} - \vec{b})$, $3\vec{a}$, $-2\vec{b}$, $(5\vec{a} - 4\vec{b})$.

Решение. Имеем координаты векторов

$$\vec{a} = \{2;\ -1;\ 3\}, \qquad \vec{b} = \{3;\ 4;\ -5\}.$$

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над их соответствующими координатами.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \{2;\ -1;\ 3\} + \{3;\ 4;\ -5\} = \{2+3;\ -1+4;\ 3+(-5)\} =$
$= \{5;\ 3;\ -2\}$ или $\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$;

2) $\vec{a} - \vec{b} = \{2;\ -1;\ 3\} - \{3;\ 4;\ -5\} = \{2-3;\ -1-4;\ 3-(-5)\} =$
$= \{-1;\ -5;\ 8\}$ или $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$;

3) $3\vec{a} = 3 \cdot \{2;\ -1;\ 3\} = \{6;\ -3;\ 9\}$ или $3\vec{a} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$;

4) $-2\vec{b} = -2 \cdot \{3;\ 4;\ -5\} = \{-6;\ -8;\ 10\}$
или $-2\vec{b} = -6\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$;

5) $5\vec{a} - 4\vec{b} = 5 \cdot \{2;\ -1;\ 3\} - 4 \cdot \{3;\ 4;\ -5\} =$
$= \{10;\ -5;\ 15\} - \{12;\ 16;\ -20\} = \{-2;\ -21;\ 35\}$
или $5\vec{a} - 4\vec{b} = -2\vec{i} - 21\vec{j} + 35\vec{k}$.

Задача 3. Доказать, что точки $A(8;-6;7)$, $B(2;-2;3)$, $C(-1;0;1)$ лежат на одной прямой.

Решение. Образуем два любых вектора, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. (Рис. 18.) Если точки лежат на одной прямой, то эти векторы будут коллинеарны. Найдем координаты этих векторов и проверим условие коллинеарности в координатной форме. Координаты вектора, заданного координатами начальной и конечной точек, находятся как разности одноименных координат конечной и начальной точек. Итак,

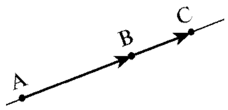


Рис. 18.

$$\overrightarrow{AB} = \{2-8; -2+6; 3-7\} = \{-6; 4; -4\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-1-8; 0+6; 1-7\} = \{-9; 6; -6\}.$$

Условие коллинеарности: (одноименные координаты коллинеарных векторов пропорциональны)

$$\frac{-6}{-9} = \frac{4}{6} = \frac{-4}{-6} = \quad \alpha \ = \ 2/3,$$

т.е. $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AC}$, а значит точки A, B, C лежат на одной прямой.

Задача 4. Дан треугольник ABC, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Точки M, N и P – середины сторон AC, BC и AB. Требуется выразить векторы $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CP}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

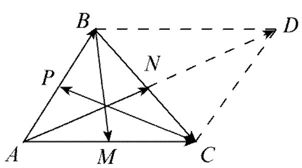


Рис. 19.

Решение. Вектор $\overrightarrow{BC}$ соединяет концы векторов сторон треугольника и направлен в конец вектора $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$. (Рис. 19.) Поэтому он является разностью векторов $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Вектор $\overrightarrow{BM}$ соединяет концы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$ и направлен в конец вектора $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$. Поэтому он является разностью векторов $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$.
Вектор $\overrightarrow{AM}$, очевидно, равен половине вектора $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$. Поэтому окончательно $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.
Вектор $\overrightarrow{CP}$ соединяет концы векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AP}$ и направлен в конец вектора $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}\,\vec{b}$. Поэтому он является разностью векторов

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - CP = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

Достроим треугольник до параллелограмма ABDC. Тогда вектор $\overrightarrow{AN}$, очевидно, равен половине вектора диагонали $\overrightarrow{AD}$, а вектор диагонали, выходящий из общего начала векторов сторон, равен сумме этих векторов $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b})$.

Задача 5. Дан параллелограмм ABCD, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.
Точка M делит диагональ AC в отношении $AM : MC = 2 : 3$.
Требуется выразить векторы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Решение. Диагональ параллелограмма $\overrightarrow{AC}$ является суммой векторов сторон $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, (рис. 20) поэтому легко находится вектор

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{a}.$$

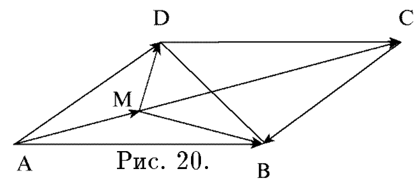


Рис. 20.

Вектор другой диагонали $\overrightarrow{BD}$ равен разности векторов

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (\vec{c} - \vec{a}) - \vec{a} = \vec{c} - 2\vec{a}.$$

Вектор $\overrightarrow{MD}$ равен разности векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$. Найдем вектор $\overrightarrow{AM}$. Так как $\overrightarrow{AM} \| \overrightarrow{AC}$ и длина вектора $\overrightarrow{AM}$ составляет 2/5 от длины вектора $\overrightarrow{AC}$, то можно записать $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{5}\vec{c}$.

Итак, $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} = (\vec{c} - \vec{a}) - \dfrac{2}{5}\vec{c} = \dfrac{3}{5}\vec{c} - \vec{a}$.

Аналогично вектор $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \dfrac{2}{5}\vec{c}$.

Задача 6. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $\vec{m}$– единичный вектор в направлении основания $\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении стороны $\overrightarrow{AD}$, угол между этими векторами $\alpha = 45^o$, длина основания $AB = 8$, длина боковой стороны $AD = 3\sqrt{2}$. Требуется разложить векторы сторон $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ и векторы диагоналей $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис.21.)

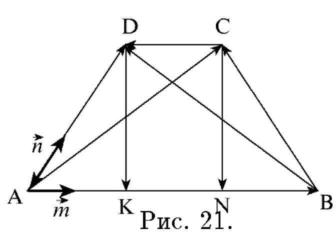


Рис. 21.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\vec{m}$ и его длина в 8 раз больше длины вектора $\vec{m}$, поэтому $\overrightarrow{AB} = 8\vec{m}$
Аналогично $\overrightarrow{AD} \| \vec{n}$ и его длина в $3\sqrt{2}$ больше, т.е. $\overrightarrow{AD} = 3\sqrt{2}\vec{n}$.

Найдем длину верхнего основания DC. Для этого опустим перпендикуляры DK и CN. Из треугольника ADK получим

$$AK = AD\cos\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.$$

Тогда $DC = AB - 2AK = 8 - 6 = 2.$

Так как вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, но направлены в противоположные стороны, то $\overrightarrow{CD} = -2\vec{m}$.
По той же причине вектор

$$\overrightarrow{DA} = -3\sqrt{2}\vec{n}.$$

Вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 3\sqrt{2}\vec{n} - 2\vec{m}$.

Тогда $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (3\sqrt{2}\vec{n} - 2\vec{m}) - 8\vec{m} = 3\sqrt{2} \cdot \vec{n} - 10 \cdot \vec{m}$.

Вектор диагонали

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (3\sqrt{2}\vec{n} - 10\vec{m}) + (-2\vec{m}) = 3\sqrt{2} \cdot \vec{n} - 12 \cdot \vec{m}.$$

Задача 7. Даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Найти координаты точки, лежащей на отрезке M_1M_2 и делящей длину этого отрезка в отношении $m : n = \lambda$. (Рис. 22.)

Решение. Пусть точка $M_3(x_3; y_3; z_3)$– искомая точка. Образуем два коллинеарных вектора

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{(x_3 - x_1);\ (y_3 - y_1);\ (z_3 - z_1)\}$ и
$\overrightarrow{M_3M_2} = \{(x_2 - x_3);\ (y_2 - y_3);\ (z_2 - z_3)\}$
Длины этих векторов относятся как

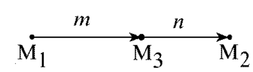


Рис. 22.

$$|\overrightarrow{M_1M_3}| : |\overrightarrow{M_3M_2}| = m : n = \lambda.$$

Аналогично для векторов $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_3M_2}$. Это равенство в координатной форме равносильно системе

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_3) \\ y_3 - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y_3) \\ z_3 - z_1 = \lambda \cdot (z_2 - z_3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} \\ y_3 = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} \\ z_3 = \dfrac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda} \end{cases}.$$

В частности, при делении отрезка пополам $m : n = 1 : 1$, $\lambda = 1$ и координаты середины отрезка $M_c(x_c; y_c; z_c)$ находятся как среднее арифметическое координат концов отрезка

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача 8. Даны три вектора
$\vec{a}=\{-3;\ -4\}$, $\vec{b}=\{5;\ -6\}$, $\vec{c}=\{-11;\ -2\}$.
Получить разложение вектора $\vec{c}$ по базису векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Легко проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поэтому они образуют базис на плоскости и можно записать вектор $\vec{c}$ в виде их линейной комбинации $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

Как уже отмечалось ранее, разложить вектор по базису – значит найти координаты вектора в этом базисе. Записываем систему уравнений для определения α и β – координат вектора $\vec{c}$.

$$\begin{cases} -11=\alpha\cdot(-3)+\beta\cdot 5 \\ -2=\alpha\cdot(-4)+\beta\cdot(-6) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-1 \end{cases}.$$

Таким образом, $\vec{c}=2\cdot\vec{a}-1\cdot\vec{b}$.

Задача 9. Радиус-вектор точки $M(x;y;z)$ составляет с осью OX угол $\alpha=60^o$, с осью OZ угол $\gamma=45^o$, длина вектора $|\overrightarrow{OM}|=8$, а координата $y>0$. Найти координаты точки M (рис. 23.)

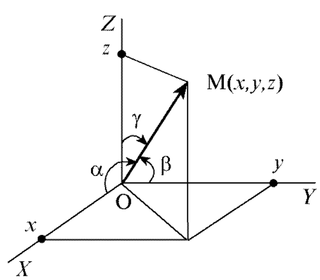


Рис. 23.

Решение. Для нахождения координат точки M воспользуемся формулами для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{OM}$

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}\Rightarrow\quad x=|\overrightarrow{OM}|\cdot\cos\alpha=$$
$$=8\cdot\cos 60^o=8\cdot(0.5)=4,$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}\quad\Rightarrow\quad z=|\overrightarrow{OM}|\cdot\cos\gamma=8\cdot\cos 45^o=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Чтобы найти $\cos\beta$, используем основное свойство направляющих косинусов $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
Отсюда: $\cos\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma}$.
Далее оставляем только знак "плюс" перед корнем, т.к. координата y должна быть положительной. Получим
$$\cos\beta=\sqrt{1-(1/2)^2-(\sqrt{2}/2)^2}=\sqrt{1-1/4-1/2}=0.5.$$
Итак, $\cos\beta=0.5$, т.е. угол $\beta=60^o$. Тогда из формулы $\cos\beta=\dfrac{y}{|\overrightarrow{OM}|}$ найдем $y=|\overrightarrow{OM}|\cdot\cos\beta=8\cdot 0.5=4$.

Итак, точка M имеет координаты $M(4;4\sqrt{2};4)$.

2.2. Скалярное произведение векторов

О п р е д е л е н и е. *Скалярным произведением* $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ *двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется* **число**, *равное произведению длин этих векторов на косинус угла* φ *между ними:*

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\cos\,\varphi.$$

Если учесть, что $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi = \mathit{ПР}_{\vec{b}}\vec{a}$

или $|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = \mathit{ПР}_{\vec{a}}\vec{b}$, (Рис. 24)

то скалярное произведение можно записать в виде:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\,\vec{b}\,|\cdot \mathit{ПР}_{\vec{b}}\vec{a}, \qquad (\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\,\vec{a}\,|\cdot \mathit{ПР}_{\vec{a}}\vec{b}.$$

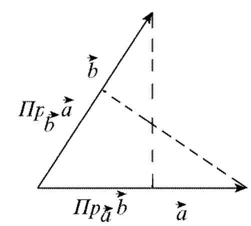


Рис. 24.

2.2. 1. Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение не меняется при перестановке местами сомножителей:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{a}),$$

в силу четности функции $\cos\varphi$.

2. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0, \qquad \text{если} \quad \vec{a}\perp\vec{b},$$

так как при $\varphi = \pi/2$ будет $\cos\varphi = 0$.

3. Скалярное произведение коллинеарных векторов равно произведению их длин:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|, \qquad \text{если} \quad \vec{a}\parallel\vec{b},$$

так как для коллинеарных векторов $\varphi = 0$, будет $\cos\varphi = 1$.

Следствие. При скалярном умножении вектора самого на себя получается скалярный квадрат вектора, который равен квадрату его длины:

$$(\vec{a}\cdot\vec{a}) = \vec{a}^{\;2} = |\,\vec{a}\,|^2\,.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

5. При скалярном умножении векторных многочленов сохраняются правила алгебры для скалярных выражений, например:

$$(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}\pm 2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^{\,2}.$$

2.2.2. Вычисление скалярного произведения

Скалярное произведение векторов, заданных своими декартовыми координатами, равно сумме произведений соответствующих координат.

Если $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\quad \vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, то

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

2.2.3. Приложения скалярного произведения

1. Нахождение длины вектора. Из свойства 3 следует

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ – общая формула длины вектора.

2. Нахождение угла между векторами. Из определения скалярного произведения

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\cos\,\varphi \qquad\Longrightarrow\qquad \cos\varphi=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|}.$$

3. Нахождение проекции вектора на вектор. Из выражения скалярного произведения

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\,\vec{b}\,|\cdot \textit{ПР}_{\vec{b}}\vec{a} \quad \text{получаем} \quad \textit{ПР}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\,\vec{b}\,|}.$$

4. Проверка условия перпендикулярности векторов.

Из $\quad \vec{a}\perp\vec{b} \quad$ следует $\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})=0 \quad$ и наоборот.

5. Нахождение работы силы.

Работа силы $\vec{F}$ по перемещению $\vec{S}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

$$A=(\vec{F}\cdot\vec{S}).$$

2.3. Векторное произведение векторов

О п р е д е л е н и е. *Векторным произведением* $[\vec{a},\ \vec{b}]$ *двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется* **третий вектор** $\vec{c}$, *удовлетворяющий трем условиям:*

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и равна произведению длин этих векторов на синус угла φ между ними

$$|\,\vec{c}\,| = |\,[\vec{a},\ \vec{b}]\,| = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,| \cdot \sin\varphi;$$

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что из его конца кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.

Геометрически модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 25)

$$|\,\vec{c}\,| = |[\vec{a},\ \vec{b}]| = S_{\text{парал.}}.$$

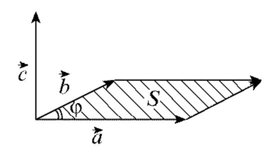


Рис. 25.

2.3.1. Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:

$$[\vec{a}\ ,\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ ,\ \vec{a}],$$

так как при повороте от вектора $\vec{b}$ к $\vec{a}$ меняется на противоположное направление вектора $\vec{c}$.

2. Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору:

$$[\vec{a}\ ,\ \vec{b}] = \vec{0}, \qquad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Отсюда следует, что векторное произведение $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

3. Модуль векторного произведения взаимно перпендикулярных векторов равен произведению их длин:

$$|\,[\vec{a}\ ,\ \vec{b}]\,| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|, \qquad \text{так как} \quad \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$[\lambda\vec{a}\ ,\ \vec{b}] = \lambda[\vec{a}\ ,\ \vec{b}].$$

Замечание. В векторном произведении не применяются формулы сокращенного умножения.

2.3.2. Векторное произведение в координатной форме

В координатной форме векторное произведение кратко можно записать в виде определителя 3-го порядка, в первой строке которого стоят базисные вектора $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, а во второй и третьей - координаты перемножаемых векторов:

$$[\vec{a}\ ,\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

2.3.3. Приложения векторного произведения

1. Нахождение площадей параллелограмма и треугольника

$$S_{\text{парал.}} = |\,[\vec{a},\ \vec{b}]\,|, \qquad S_{\text{треуг.}} = \frac{1}{2}|\,[\vec{a},\ \vec{b}]\,|.$$

2. Нахождение вектора, перпендикулярного двум другим векторам.

Если требуется найти вектор, перпендикулярный одновременно двум векторам, причем длина вектора не оговорена заранее, то в качестве такого вектора можно взять вектор, пропорциональный векторному произведению заданных векторов, т.е.

$$\vec{c} = \lambda\cdot[\vec{a},\ \vec{b}], \qquad \lambda - \text{любое число.}$$

3. Физические приложения (момент силы и т.п.)

2.4. Смешанное произведение 3-х векторов

О п р е д е л е н и е. *Смешанным произведением трех векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, *и* $\vec{c}$ *называется* **число**, *которое получается, если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *перемножить векторно, а полученный в результате этого умножения вектор умножить скалярно на вектор* $\vec{c}$.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = ([\,\vec{a}\,, \vec{b}\,] \cdot \vec{c}).$$

Геометрически смешанное произведение по абсолютной величине равно *объему* параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$. (Рис. 26.)

$$V = \,|\,([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c})\,|\,.$$

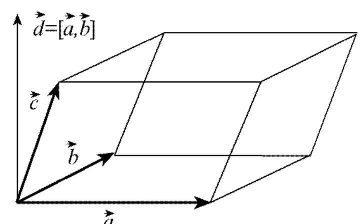


Рис. 26.

2.4.1. Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов:

$$([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) = ([\vec{c},\ \vec{a}] \cdot \vec{b}) = ([\vec{b},\ \vec{c}] \cdot \vec{a}) = ([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) = \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}.$$

2. Смешанное произведение меняет знак при перестановке двух векторов, например

$$([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) = -([\vec{b},\ \vec{a}] \cdot \vec{c}),$$
$$([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) = -([\vec{c},\ \vec{b}] \cdot \vec{a}),$$
$$([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) = -([\vec{a},\ \vec{c}] \cdot \vec{b}).$$

3. Смешанное произведение равно нулю, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Следствие Если в смешанном произведении участвуют два одинаковых вектора, то смешанное произведение равно нулю.

Говорят, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют *правую тройку векторов*, если их смешанное произведение положительное. Если же смешанное произведение этих же векторов отрицательное, то такая тройка векторов называется *левой.*

Базисные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартовой системы координат образуют правую тройку. Если смотреть из конца вектора $\vec{i}$, то кратчайший поворот от вектора $\vec{j}$ к вектору $\vec{k}$ виден против часовой стрелки.

2.4.2. Вычисление смешанное произведения

В координатной форме смешанное произведение кратко можно записать в виде определителя 3-го порядка, строками которого являются координаты перемножаемых векторов:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = ([\,\vec{a}\,, \vec{b}\,] \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2.4.3. Приложения смешанного произведения

1. Вычисление объемов параллелепипеда и пирамиды

$$V_{\text{параллелепипеда}} = \;|\,([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c})\,|, \qquad V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}\;|\,([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c})\,|\,.$$

2. Проверка линейной независимости системы 3-х векторов. (Или проверка условия, что три вектора образуют базис в пространстве.)

Если смешанное произведение трех векторов не равно нулю

$$([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) \neq 0,$$

то совокупность векторов является линейно независимой, следовательно образует базис в пространстве. В этом случае векторы не лежат в одной или параллельных плоскостях (некомпланарны).

Если смешанное произведение трех векторов равно нулю

$$([\vec{a},\ \vec{b}] \cdot \vec{c}) = 0,$$

то совокупность векторов является линейно зависимой и не образует базис в пространстве. В этом случае векторы лежат в одной или параллельных плоскостях (компланарны).

2.5. Задачи

Рассмотрим задачи, в которых используются нелинейные операции над векторами, при разных вариантах задания векторов.

Задача 1. Даны два вектора

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}.$$

Найти:

1) скалярное произведение векторов,
2) длины векторов,
3) косинус угла между векторами,
4) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение.

1) Векторы заданы в декартовом базисе своими координатами, поэтому можно использовать соответствующие формулы. Для нахождения скалярного произведения используем формулу вычисления скалярного произведения в координатной форме:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (2; -3; 5)(4; 1; -6) =$$

$$= 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot (-6) = 8 - 3 - 30 = -25.$$

2) Используем формулу длины вектора, заданного декартовыми координатами

$$|\, \vec{a}\, | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Координаты вектора $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$, тогда

$$|\, \vec{a}\, | = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}.$$

Координаты вектора $\vec{b} = \{4; 1; -6\}$, тогда

$$|\, \vec{b}\, | = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{53}.$$

3) Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению их длин

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\, \vec{a}\, | \cdot |\, \vec{b}\, |}.$$

Подставляем в эту формулу найденные в предыдущих задачах: величину скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и значения их длин. Получим:

$$\cos\varphi = \frac{-25}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{53}}.$$

4) Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ также находится с использованием скалярного произведения векторов

$$\text{ПР}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\,\vec{b}\,|}.$$

Скалярные произведения и длины вектора $\vec{b}$ нами уже найдены. Подставляем эти значения в формулу проекции и получаем:

$$\text{ПР}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{-25}{\sqrt{53}}.$$

Задача 2. Даны два вектора

$$\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}; \quad \vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}, \quad |\,\vec{m}\,| = 2, \quad |\,\vec{n}\,| = 3, \quad (\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = 120^o.$$

Найти:
1) скалярное произведение векторов,
2) длины векторов,
3) косинус угла между векторами,
4) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение.

1) Векторы заданы в произвольном базисе, поэтому при нахождении скалярного произведения перемножаются векторные многочлены по правилам алгебры. Итак, в выражение $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ вместо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ подставляем их разложения по базису векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (2\vec{m}+\vec{n})(\vec{m}-3\vec{n}) = 2\vec{m}^2 + (\vec{n}\cdot\vec{m}) - 6(\vec{m}\cdot\vec{n}) - 3\vec{n}^2.$$

Преобразуем это выражение с учетом свойств скалярного произведения:

a) $(\vec{m}\cdot\vec{n}) = |\,\vec{m}\,||\,\vec{n}\,|\cdot\cos(\vec{m},\!\!\hat{\ }\vec{n})$,
b) $(\vec{m}\cdot\vec{n}) = (\vec{n}\cdot\vec{m})$,
c) $\vec{n}^2 = |\,\vec{n}\,|^2, \quad \vec{m}^2 = |\,\vec{m}\,|^2$.

Получим $\quad 2\,|\,\vec{m}\,|^2 - 5\,|\,\vec{m}\,||\,\vec{n}\,|\cdot\cos(\vec{m},\!\!\hat{\ }\vec{n}) - 3\,|\,\vec{n}\,|^2 =$

$$= 2\cdot 4 - 5\cdot 2\cdot 3\cdot(-0.5) - 3\cdot 9 = -4.$$

2) Так как координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неизвестны, используем общую формулу длины вектора:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Подставляем в эту формулу выражение вектора $\vec{a}$ и учтем, что для скалярного умножения векторов справедливы формулы сокращенного умножения. Получим

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(2\vec{m}+\vec{n})^2} = \sqrt{4\vec{m}^2 + 4(\vec{m}\cdot\vec{n}) + \vec{n}^2} =$$

далее переходим к скалярным величинам, как в предыдущей задаче

$$= \sqrt{4\,|\,\vec{m}\,|^2 + 4\,|\,\vec{m}\,||\,\vec{n}\,|\cos(\vec{m},\!\!\hat{\ }\vec{n}) + |\,\vec{n}\,|^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 4 + 4\cdot 2\cdot 3\cdot(-0.5) + 9} = \sqrt{13}.$$

Аналогично находится длина вектора $\vec{b}$

$$|\,\vec{b}\,| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{(\vec{m}-3\vec{n})^2} = \sqrt{\vec{m}^2 - 6(\vec{m}\cdot\vec{n}) + 9\vec{n}^2} =$$

$$= \sqrt{|\,\vec{m}\,|^2 - 6\,|\,\vec{m}\,||\,\vec{n}\,|\cos(\vec{m},\!\!\hat{\ }\vec{n}) + 9\,|\,\vec{n}\,|^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 6\cdot 2\cdot 3\cdot(-0.5) + 9\cdot 9} = \sqrt{103}.$$

3) Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению их длин

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|}.$$

Подставляем в эту формулу найденные в предыдущих задачах: величину скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и значения их длин. Получим:

$$\cos\varphi = \frac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{103}}.$$

4) Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находится как отношение скалярного произведения векторов к длине вектора, на который проектируется данный вектор

$$ПР_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\mid \vec{b} \mid} = \frac{-4}{\sqrt{103}}.$$

Задача 3. При каком значении λ векторы

$$\vec{a} = \lambda\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} \ \text{ и } \ \vec{b} = -5\vec{i} + \lambda\vec{j} + 6\vec{k}$$

будут перпендикулярны?

Решение. Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0.$$

Для векторов, заданных в декартовом базисе, используем условие перпендикулярности в координатной форме

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Тогда $(\lambda; 8; 2)(-5; \lambda; 6) = 0 \implies -5 \cdot \lambda + 8 \cdot \lambda + 12 = 0.$

Получаем $\lambda = -4.$

Задача 4. При каком значении λ векторы

$\vec{a} = 3\vec{m} + \lambda\vec{n},$ и $\vec{b} = 4\vec{m} - 5\vec{n},$ $\mid \vec{m} \mid = 2,$ $\mid \vec{n} \mid = 1,$ $\alpha = (\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = 120^o$

будут перпендикулярны?

Решение. Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0.$$

Подставляем в эту формулу разложения векторов. Имеем:

$$(3\vec{m} + \lambda\vec{n})(4\vec{m} - 5\vec{n}) = 0.$$

$$12\vec{m}^2 + 4\lambda(\vec{m}\cdot\vec{n}) - 15(\vec{m}\cdot\vec{n}) - 5\lambda\vec{n}^2 = 0.$$

Переходим к скалярным величинам:

$$12\mid\vec{m}\mid^2 + 4\lambda\mid\vec{m}\mid\mid\vec{n}\mid\cos\alpha - 15\mid\vec{m}\mid\mid\vec{n}\mid\cos\alpha - 5\lambda\mid\vec{n}\mid^2 = 0.$$

$$12\cdot 4 + 4\lambda\cdot 2\cdot 1\cdot(-0.5) - 15\cdot 2\cdot 1\cdot(-0.5) - 5\lambda\cdot 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 7.$$

Задача 5. Найти работу равнодействующей двух сил $\vec{F}_1 = \{1;9;-3\}$, $\vec{F}_2 = \{-5;-6;1\}$ по перемещению из положения $M_1(-4;3;-2)$ в положение $M_2(2;5;-8)$.

Решение. Вычисляем работу с помощью скалярного произведения

$$A = (\vec{F}\cdot\vec{S}).$$

В нашем случае $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \{-4;3;-2\}$.

Вектор перемещения $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{6;2;-6\}$.

Тогда $A = (-4;3;-2)\cdot(6;2;-6) = -24 + 6 + 12 = -6$.

Задача 6. Найти работу силы $\vec{F}$ по перемещению $\vec{S}$, если $\mid\vec{F}\mid = 3$, $\mid\vec{S}\mid = 5$, а угол между векторами силы и перемещения равен 45^o.

Решение. Используем формулу $A = (\vec{F}\cdot\vec{S})$.

Так как координаты векторов нам не даны, используем определение скалярного произведения

$$A = (\vec{F}\cdot\vec{S}) = \mid\vec{F}\mid\cdot\mid\vec{S}\mid\cdot\cos(\vec{F}\hat{,}\vec{S}) = 3\cdot 5\cdot\cos 45^o = 7.5\cdot\sqrt{2}.$$

Задача 7. Найти величину равнодействующей двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если $\mid\vec{F}_1\mid = 2$, $\mid\vec{F}_2\mid = 3$, угол между векторами сил $\varphi = 60^o$.

Решение. Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. (Рис. 27.) Ее величина (модуль):

$$\mid\vec{F}\mid = \mid\vec{F}_1 + \vec{F}_2\mid.$$

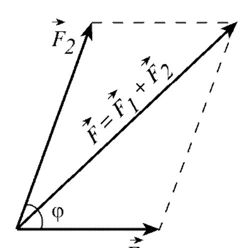


Рис. 27

Так как координаты векторов нам не даны, используем общую формулу длины вектора

$$\mid\vec{F}\mid = \mid\vec{F}_1 + \vec{F}_2\mid = \sqrt{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2} = \sqrt{\vec{F}_1^2 + 2(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2) + \vec{F}_2^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{F_1}|^2 + 2\,|\vec{F_1}| \cdot |\vec{F_2}| \cdot \cos\varphi + |\vec{F_1}|^2} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3^2} = \sqrt{19}.$$

Задача 8. Найти косинус внутреннего угла A в треугольнике ABC, если даны координаты его вершин:

$$A(2;3;-7), \quad B(-1;3;-1), \quad C(2;-6;5).$$

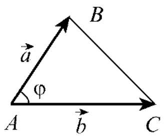


Рис. 28.

Решение. Образуем два вектора, выходящих из точки A, и найдем их координаты. (Рис. 28.)

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{-3;0;6\}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{0;-9;12\}.$$

Далее решение аналогично решению задачи 1 п.3.

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|} = \frac{(-3;0;6)\cdot(0;-9;12)}{\sqrt{(-3)^2+0^2+6^2}\cdot\sqrt{0^2+(-9)^2+12^2}} =$$

$$= \frac{72}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{225}} = \frac{72}{3\sqrt{5}\cdot 15} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \approx 0.715.$$

По таблицам находим $\varphi \approx 44^o$.

Задача 9. Найти косинус угла φ между стороной AB и медианой AM в треугольнике ABC, если даны вектора сторон AB и AC и угол α между ними: $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $|\,\vec{b}\,| = 1$, $|\,\vec{c}\,| = 2$, $\alpha = 60^o$.

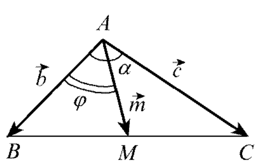


Рис. 29.

Решение. Для решения задачи необходимо найти вектор медианы $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$. (Рис. 29.) Очевидно, что этот вектор является полусуммой векторов сторон, т.е.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}).$$

Тогда формула косинуса угла φ между стороной и медианой примет вид:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\vec{b}}{|\,\vec{b}\,||\,\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\,|} = \frac{(\vec{b}+\vec{c})\vec{b}}{|\,\vec{b}\,||\,(\vec{b}+\vec{c})\,|} = \frac{\vec{b}^{\,2} + (\vec{b},\vec{c})}{1\cdot\sqrt{(\vec{b}+\vec{c})^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

(Предлагаем проделать все вычисления самостоятельно.)

Задача 10. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$, , если известно их скалярное произведение $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3$.

Решение. Два коллинеарных вектора связаны соотношением:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Запишем с учетом этого скалярное произведение векторов:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \vec{a}^2 = \lambda \mid \vec{a} \mid^2 = \lambda \cdot (1 + 1 + 4) = \lambda \cdot 6 = 3.$$

Итак, коэффициент $\lambda = 0.5$.

Тогда координаты вектора $\vec{b} = 0.5 \cdot \{1; -1; 2\} = \{0.5; -0.5; 1\}$.

Задача 11. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} = \{3; 2; -5\}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \qquad \text{и его модуль.}$$

Решение. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет являться третий вектор $\vec{c}$. Так как векторы заданы в декартовом базисе своими координатами, то можно найти координаты вектора $\vec{c}$. Для этого запишем векторное произведение в координатной форме

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

(раскладываем этот определитель по элементам первой строки и получаем координаты вектора $\vec{c}$)

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{i} - 19 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k}.$$

Итак, $\vec{c} = \{1; -19; -7\}$.
Зная координаты вектора, находим его модуль

$$\mid \vec{c} \mid = \mid [\vec{a}, \vec{b}] \mid = \sqrt{1 + 361 + 49} = \sqrt{411}.$$

Задача 12. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}; \quad \vec{b} = \vec{n} - 4\vec{m}, \quad |\,\vec{m}\,| = 2, \ |\,\vec{n}\,| = 1, \quad \alpha = (\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = 30^o,$$

и его модуль.

Решение. Векторы заданы в произвольном базисе. Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, используя их разложения в этом базисе.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [(2\vec{m} + 3\vec{n}), (\vec{n} - 4\vec{m})] = 2[\vec{m}, \vec{n}] + 3[\vec{n}, \vec{n}] - 8[\vec{m}, \vec{m}] - 12[\vec{n}, \vec{m}].$$

Упростим это выражение с учетом свойств векторного произведения:

1) $[\vec{m}, \vec{m}] = [\vec{n}, \vec{n}] = \vec{0}$, 3) $|\,[\vec{m}, \vec{n}]\,| = |\,\vec{m}\,| \cdot |\,\vec{n}\,| \cdot \sin(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})$.

2) $[\vec{n}, \vec{m}] = -[\vec{m}, \vec{n}]$,

Получим $[\vec{a}, \vec{b}] = 14[\vec{m}, \vec{n}]$.

Модуль векторного произведения

$$|\,[\vec{a}, \vec{b}]\,| = 14\,|\,[\vec{m}, \vec{n}]\,| = 14\,|\,\vec{m}\,||\,\vec{n}\,| \cdot \sin\alpha = 14 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (0.5) = 14.$$

Задача 13. Даны вершины треугольника:

$$A(-2; 1; 3), \quad B(2; -1; 0), \quad C(-4; 3; 5).$$

Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной на сторону AC.

Решение. Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов-сторон. (Рис. 30.) Обозначим

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \{-2; 2; 2\}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB} = \{4; -2; -3\}.$$

Тогда площадь треугольника

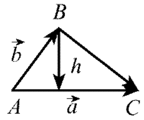


Рис. 30.

$$S = \frac{1}{2}\,|[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{array}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|-2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\,| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{6}.$$

Для нахождения высоты используем известную формулу площади треугольника

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

где a - длина основания, h - высота. (Рис. 30.) Отсюда $h = \dfrac{2S}{a}$.
В нашем случае $a = \mid \vec{a} \mid = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$.

Тогда высота треугольника $h = \dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Задача 14. Даны вектора сторон треугольника

$$\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}, \quad \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}, \quad \mid \vec{m} \mid = \mid \vec{n} \mid = 2, \quad \alpha = (\vec{m}\hat{,}\vec{n}) = 60^o.$$

Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной на сторону $\vec{a}$.

Решение. Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов-сторон (Рис. 30.)
$S = \dfrac{1}{2} \mid [\vec{a}, \vec{b}] \mid = \dfrac{1}{2} \mid [(3\vec{m} + \vec{n}), (2\vec{m} - \vec{n})] \mid =$
$\dfrac{1}{2} \mid 6[\vec{m}, \vec{m}] + 2[\vec{n}, \vec{m}] - 3[\vec{m}, \vec{n}] - [\vec{n}, \vec{n}] \mid =$
$= \dfrac{1}{2} 5 \mid [\vec{m}, \vec{n}] \mid = \dfrac{5}{2} \mid \vec{m} \mid\mid \vec{n} \mid \sin\alpha = \dfrac{5}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.Итак, $S = 5\sqrt{3}$.

Высота треугольника $h = \dfrac{2S}{a}$.
Находим длину стороны a:

$$a = \mid \vec{a} \mid = \sqrt{(3\vec{m} + \vec{n})^2} = \sqrt{9\vec{m}^2 + 6(\vec{m} \cdot \vec{n}) + \vec{n}^2} =$$

$$= \sqrt{9 \mid \vec{m} \mid^2 + 6 \mid \vec{m} \mid\mid \vec{n} \mid \cos\alpha + \mid \vec{n} \mid^2} =$$

$$\sqrt{9 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (0.5) + 4} = \sqrt{52}.$$

Высота $h = \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{52}}$.

Задача 15. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный двум векторам $\vec{a} = \{2; 1; 2\}$ и $\vec{b} = \{3; -4; 2\}$ при условии, что $|\ \vec{x}\ | = 1$ и он образует с осью OX тупой угол.

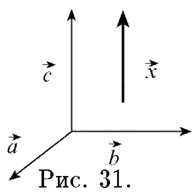


Рис. 31.

Решение. Вектор $\vec{x}$ коллинеарен векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 31), т.е.

$$\vec{x}\ ||\ \vec{c}, \qquad \text{где}\ \ \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Итак, $\quad \vec{x} = \lambda \vec{c}.$

Координаты вектора $\quad \vec{x} = \{\lambda c_x; \lambda c_y; \lambda c_z\}.$

Длина вектора $\quad |\ \vec{x}\ | = \sqrt{\lambda^2 c_x^2 + \lambda^2 c_y^2 + \lambda^2 c_z^2} =$

$$= |\ \lambda\ | \cdot \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = |\ \lambda\ | \cdot |\ \vec{c}\ |\ .$$

Коэффициент $\quad \lambda = \dfrac{|\ \vec{x}\ |}{|\ \vec{c}\ |} = \pm \dfrac{1}{|\ \vec{c}\ |}.$

Найдем координаты вектора $\vec{c}$ и его длину.

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Итак, $\quad \vec{c} = \{10; 2; -11\}.$

Длина вектора $\vec{c}$: $\quad |\ \vec{c}\ | = \sqrt{100 + 4 + 121} = 15.$

Коэффициент $\quad \lambda = \pm \dfrac{1}{15}.$

Тогда координаты вектора $\quad \vec{x} = \left\{ \pm \dfrac{10}{15}; \pm \dfrac{2}{15}; \mp \dfrac{11}{15} \right\}.$

Так как вектор должен образовывать тупой угол с осью OX, его первая координата должна быть отрицательной, поэтому окончательно получим

$$\vec{x} = \left\{ \frac{-2}{3};\ \frac{-2}{15};\ \frac{11}{15} \right\}.$$

Задача 16. Вычислить смешанное произведение

$$((\vec{a}+\vec{c})(\vec{c}-3\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})), \qquad \text{если известно} \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{c})=4.$$

Решение. Используя определение смешанного произведения, перемножим два первых сомножителя векторным образом:

$$[(\vec{a}+\vec{c})(\vec{c}-3\vec{b})]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{c}]-3[\vec{a},\vec{b}]-3[\vec{c},\vec{b}].$$

Учтем, что $[\vec{c},\vec{c}]=\vec{0}$ и умножим полученное выражение на третий сомножитель скалярно. Получим

$$([\vec{a},\vec{c}]-3[\vec{a},\vec{b}]-3[\vec{c},\vec{b}])\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$$

$$=([\vec{a},\vec{c}]\cdot\vec{a})-3([\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{a})-3([\vec{c},\vec{b}]\cdot\vec{a})+([\vec{a},\vec{c}]\cdot\vec{b})-3([\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{b})-3([\vec{c},\vec{b}]\cdot\vec{b}).$$

В силу свойств смешанного произведения имеем:

$$(\vec{a}\vec{c}\vec{a})=0, \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{a})=0, \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{b})=0, \quad (\vec{c}\vec{b}\vec{b})=0.$$

Тогда останется выражение: $-3(\vec{c}\vec{b}\vec{a})+(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$, в котором учитываем, что смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов и меняет знак при перестановке двух векторов. Окончательно получим:

$$-3(\vec{c}\vec{b}\vec{a})+(\vec{a}\vec{c}\vec{b})=-3(\vec{a}\vec{c}\vec{b})+(\vec{a}\vec{c}\vec{b})=-2(\vec{a}\vec{c}\vec{b})=2(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=2\cdot 4=8.$$

Задача 17. Доказать, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.

$$\vec{a}=\{2;3;1\}, \quad \vec{b}=\{-1;2;-2\}, \quad \vec{c}=\{1;2;1\}, \quad \vec{x}=\{2;-2;1\}.$$

Решение. Три вектора в пространстве образуют базис, если они некомпланарны (Рис. 32.) (линейно независимы). Тогда их смешанное произведение не должно равняться нулю. Итак, проверяем условие $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\neq 0$.
Запишем смешанное произведение в координатной форме

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{векторы образуют базис.}$$

Тогда любой вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, где α,β,γ –

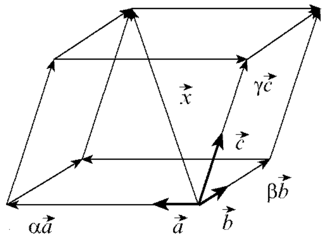


Рис. 32.

коэффициенты линейной комбинации являются координатами вектора $\vec{x}$ в базисе векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Переходим к системе уравнений для нахождения этих коэффициентов

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 3\alpha + 2\beta + 2\gamma = -2 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -3 \end{cases}.$$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}.$$

Задача 18. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках (рис. 33.)

$$A(-5;3;4), \quad B(-3;2;2), \quad C(4;1;2), \quad D(-2;9;10).$$

Решение. Объем пирамиды находим с помощью смешанного произведения

$$V = \frac{1}{6} \mid (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \mid .$$

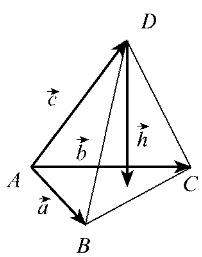


Рис. 33.

Образуем три вектора, выходящие из одной точки

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{2; -1; -2\}$,
$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{9; -2; -2\}$,
$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \{3; 6; 6\}$.

Смешанное произведение этих векторов в координатной форме

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 9 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -60.$$

Итак, объем пирамиды $\qquad V = \dfrac{1}{6} \mid -60 \mid = 10.$

Замечание. Если требуется найти длину высоты, опущенной из вершины D на основание ABC, то используются формулы объема треугольной пирамиды и площади треугольника:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \quad \text{из которой} \quad H = \frac{3V}{S_{\text{осн.}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \mid (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \mid}{\frac{1}{2} \left|[\vec{a}, \ \vec{b}]\right|} = \frac{\mid (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \mid}{\left|[\vec{a}, \ \vec{b}]\right|}.$$

Задача 19. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, (рис. 34), если известно:

$$|\,\vec{a}\,| = 3, \quad |\,\vec{b}\,| = 6, \quad |\,\vec{c}\,| = 2, \quad \alpha = (\vec{c}\hat{,}\vec{a}) = 135^o, \quad \varphi = (\vec{b}\hat{,}[\vec{c},\vec{a}]) = 45^o.$$

Решение. Используем формулу вычисления объема параллепипеда

$$V = |\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|\,.$$

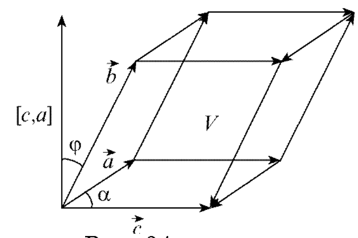


Рис. 34.

Из условия задачи видно, что в основании параллелепипеда лежат вектора $\vec{c}$ и $\vec{a}$, поэтому смешанное произведение распишем следующим образом:

$$|\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,| = |\,[\vec{c},\vec{a}]\cdot\vec{b}\,| =$$

далее скалярное произведение векторов $[\vec{c},\vec{a}]$ и $\vec{b}$ распишем, используя определение скалярного произведения:

$$= |\,[\vec{c},\vec{a}]\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\cos\varphi =$$

модуль векторного произведения векторов $\vec{c}$ и $\vec{a}$ равен произведению их длин на синус угла между ними:

$$= |\,\vec{c}\,|\cdot|\,\vec{a}\,|\cdot\sin\alpha\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\cos\varphi = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi =$$

$$= 3\cdot 6\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 18.$$

Задача 20. Доказать, что четыре точки $A(4;-3;-5)$, $B(2;-3;1)$, $C(-1;1;4)$, $D(5;5;2)$ лежат в одной плоскости. (Рис. 35.)

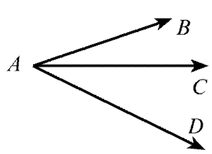


Рис. 35.

Решение задачи сводится к проверке условия компланарности трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. В отличие от предыдущих задач смешанное произведение этих векторов должно равняться нулю. Составляем определитель третьего порядка, строками которого являются координаты этих векторов, вычисляем его и делаем вывод.

Глава 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия - это раздел математики, который изучает соответствие между аналитическими выражениями и геометрическими образами. При этом вид аналитического выражения, соответствующего данному геометрическому образу, зависит от способа привязки, т.е. от выбора системы координат. Оказывается, что всегда можно подобрать систему координат таким образом, чтобы уравнение данного геометрического образа было наиболее простым (каноническим). Наиболее употребимой является прямоугольная декартова система координат. Ниже мы рассмотрим вопрос об уравнениях и их геометрических образах в прямоугольной системе координат на плоскости и в 3-х мерном пространстве, а также приведем примеры использования полярной системы координат на плоскости и параметрического способа задания линий.

1. Прямая на плоскости

Всякую прямую на плоскости в прямоугольных координатах XOY можно описать уравнением 1-ой степени (линейным) относительно двух переменных x и y, т.е. уравнением вида

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

Это уравнение называется *общим уравнением прямой на плоскости.* (Часто при решении задач удобно пользоваться и другими видами уравнений прямой, но после решения полученные уравнения прямой принято приводить к общему виду.)

В аналитической геометрии наиболее часто используемые формулы и соотношения получены как результат решения конкретной задачи. Рассмотрим задачи, в которых получены различные виды уравнений прямой на плоскости в зависимости от исходных данных.

3.1.1. Основные уравнения прямой на плоскости

1. *Прямая задана точкой* $M_0(x_0;\ y_0)$ *и вектором нормали* $\vec{N} = \{A;\ B\}$, *в качестве которого может быть взят любой вектор, перпендикулярный прямой.* (Рис.1.)

В этом случае для составления уравнения прямой мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y)$, образуем вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{(x-x_0);\ (y-y_0)\}$
и записываем условие перпендикулярности векторов $\vec{N} = \{A;\ B\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{(x-x_0);\ (y-y_0)\}$,

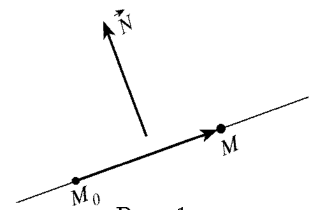


Рис. 1.

используя их скалярное произведение $\left(\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right) = 0.$ Или в координатной форме

$$A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) = 0. \qquad (2)$$

Раскрыв скобки и обозначив $C = -Ax_0 - By_0$, получим *общее уравнение* прямой

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0 \quad\Longrightarrow\quad Ax + By + C = 0.$$

Таким образом, зная координаты точки, через которую проходит прямая, и какой-либо вектор, перпендикулярный прямой, можно легко получить ее уравнение.

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;\ 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{3;\ -4\}$.

Решение. Используем уравнение (2)

$$3\cdot(x+1) - 4\cdot(y-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad 3x+3-4y+8 = 0 \quad\Rightarrow\quad 3x-4y+11 = 0.$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;\ -5)$ перпендикулярно оси OY.

Решение. Используем уравнение (2). Отметим, что ортом оси OY служит вектор $\vec{j} = \{0;\ 1\}$.

$$0\cdot(x-3) + 1\cdot(y+5) = 0 \quad\Longrightarrow\quad y+5 = 0.$$

2. *Прямая задана точкой* $M_0(x_0;\ y_0)$ *и направляющим вектором* $\vec{s} = \{m;\ n\}$, *в качестве которого может быть взят любой вектор, параллельный прямой.* (Рис.2.)

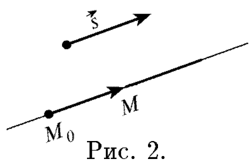


Рис. 2.

В этом случае для составления уравнения прямой мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y)$, образуем вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0);\ (y - y_0)\}$ и записываем условие коллинеарности векторов $\vec{s} = \{m;\ n\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0)\}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \vec{s}.$$

Или в координатной форме

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (3)$$

Это уравнение носит название *канонического уравнения* прямой на плоскости.

Итак, зная координаты точки, через которую проходит прямая, и какой-либо вектор, параллельный прямой, можно легко получить ее уравнение.

Задача 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;\ 2)$ параллельно $\vec{s} = \{3;\ -4\}$.

Решение. Используем уравнение (3)

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{-4} \quad \Longrightarrow \quad -4(x + 1) = 3(y - 2) \quad \Longrightarrow \quad 4x + 3y - 2 = 0.$$

После преобразования мы получили общее уравнение прямой.

Задача 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;\ -5)$ параллельно оси OY.

Решение. Используем уравнение (3), зная $\vec{j} = \{0;\ 1\}$.

$$\frac{x - 3}{0} = \frac{y + 5}{1} \quad \Longrightarrow \quad 1 \cdot (x - 3) = 0(y + 5) \quad \Longrightarrow \quad x - 3 = 0.$$

3. *Прямая задана двумя точками* $M_1(x_1;\ y_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2)$.

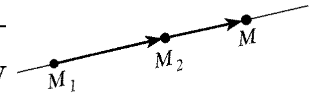


Рис. 3.

В этом случае для составления уравнения прямой мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y)$, образуем два вектора (рис. 3.)
$\overrightarrow{M_1M} = \{(x - x_1)\ ;\ (y - y_1)\}$ и
$\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1)\ ;\ (y_2 - y_1)\}$,
записываем условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ в координатной форме

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (4)$$

Это уравнение *прямой, проходящей через две заданные точки.*

Заметим, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является направляющим вектором прямой, поэтому уравнение (4) легко могло быть получено и из канонического уравнения.

Задача 5. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(3; -6)$ и $M_2(-5; 1)$.

Решение. Подставим в уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты точек M_1 и M_2.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 3}{-5 - 3} = \frac{y + 6}{1 + 6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 3}{-8} = \frac{y + 6}{7}.$$

Полученное каноническое уравнение преобразуем к общему виду

$$7x + 8y + 27 = 0.$$

4. Отметим, что из канонического уравнения прямой легко получаются *параметрические уравнения*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t \ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t \\[2ex] \dfrac{y - y_0}{n} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}. \qquad (5)$$

Таким образом, для составления уравнения прямой на плоскости необходимо знать:

– либо точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и вектор нормали прямой $\vec{N} = \{A; B\}$;

– либо точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и направляющий вектор $\vec{s} = \{m; n\}$;

– либо две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.

Но, кроме основных уравнений (1) – (3), используются уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ с заданным угловым коэффициентом (тангенсом угла наклона, образованного прямой с осью OX), и уравнение прямой *"в отрезках"*.
Получим эти уравнения.

5. Преобразуем уравнение (2) следующим образом:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B(y - y_0) = -A(x - x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y - y_0 = -\frac{B}{A} \cdot (x - x_0).$$ Обозначив $k = -\dfrac{B}{A}$, получим

$$y - y_0 = k\,(x - x_0). \tag{6}$$

После преобразований можно записать еще один вариант уравнения прямой *с угловым коэффициентом*:

$$y - y_0 = kx - kx_0 \quad \Rightarrow \quad y = kx + b. \tag{7}$$

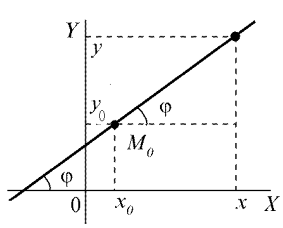


Рис. 4.

Здесь $b = (y_0 - kx_0)$.
Уравнения (6) и (7) отличаются тем, что в уравнении (6) сразу видны координаты точки, через которую проходит прямая, а в уравнении (7) – нет. Смысл параметра $k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi$ как тангенса угла наклона прямой к оси OX показан на рисунке 4.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом получается и из канонического уравнения (3)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{m} \cdot (x - x_0) = y - y_0$$

$$\Rightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{где} \quad k = \frac{n}{m}.$$

6. Получим уравнение прямой, отсекающей на координатных осях OX и OY отрезки a и b соответственно.

Для решения задачи можно использовать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, лежащие на осях координат $M_1(a;\ 0)$ и $M_2(0;\ b)$. (Рис.5.)

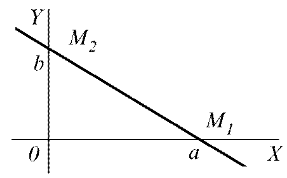


Рис. 5.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{-a}+\frac{-a}{-a}=\frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (8)$$

Это и есть уравнение прямой *"в отрезках."*

В таблице 3.1. приведены типы уравнений прямой на плоскости с указанием геометрического смысла входящих в них параметров.

Очень важно уметь из данного уравнения прямой извлечь всю информацию об этой прямой: координаты точки, через которую проходит прямая, и координаты вектора – либо направляющего, либо вектора нормали, так как практически во всех задачах о взаимном расположении прямых, которые будут рассмотрены ниже, используются средства векторной алгебры.

Заметим, что уравнение одной и той же прямой может быть записано различными способами, причем из одного вида уравнения легко получить другой.

Уравнения прямой на плоскости

Таблица 3.1

N	Название	Уравнение	Смысл параметров
1.	Прямая, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$M_0(x_0;y_0)-$ точка на прямой, $\vec{N}=\{A;B\}-$ вектор нормали.
2.	Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0$	$\vec{N}=\{A;B\}$.
3.	Уравнение прямой в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$a-$ отрезок на оси OX , $b-$ отрезок на оси OY.
4.	Каноническое ур-е (Прямая, проходящая через точку параллельно данному вектору)	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	$M_0(x_0;y_0)-$ точка на прямой, $\vec{s}=\{m;n\}-$ направляющий вектор.
5.	Параметрические уравнения	$x=mt+x_0$, $y=nt+y_0$	тот же.
6.	Прямая, проходящая через точку, с заданным угловым коэффициентом	$y-y_0=k(x-x_0)$, $k=tg\varphi=-\frac{A}{B}=\frac{n}{m}$.	$M_0(x_0;y_0)-$ точка на прямой, $k-$ угловой коэффициент
7.	Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$

Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Прямые заданы общими уравнениями

$$l_1 \ : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad l_2 \ : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

где $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2\}$ - вектора нормалей.

Таблица 3.2.1.

Косинус угла	Условие параллел.	Условие перпендикул.
$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{\lvert\vec{N}_1\rvert \cdot \lvert\vec{N}_2\rvert} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\vec{N}_1 \lvert\rvert \vec{N}_2$ $\vec{N}_1 = \lambda \cdot \vec{N}_2$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$	$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ $(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 0$ $A_1 \ A_2 + B_1 \ B_2 = 0$

2. Прямые заданы каноническими уравнениями

$$l_1 \ : \ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \qquad l_2 \ : \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

где $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1\}$, $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2\}$ – направляющие вектора.

Таблица 3.2.2.

Косинус угла	Условие параллел.	Условие перпендикул.
$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{\lvert\vec{s}_1\rvert \cdot \lvert\vec{s}_2\rvert} = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m2^2 + n_2^2}}$	$\vec{s}_1 \lvert\rvert \vec{s}_2$ $\vec{s}_1 = \lambda \cdot \vec{s}_2$ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$	$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ $(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0$ $m_1 \ m_2 + n_1 \ n_2 = 0$

3. Прямые заданы уравнениями

$$l_1 \ : \ y = k_1x + b_1, \qquad l_2 \ : \ y = k_2x + b_2,$$

где $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2$ – угловые коэффициенты.

Таблица 3.2.3.

Тангенс угла	Условие параллел.	Условие перпендикул.
$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$	$k_1 = k_2$	$1 + k_1 \cdot k_2 = 0$

Расстояние d от точки $M_1(x_1;\ y_1)$ до прямой $l : \ Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{\lvert Ax_1 + By_1 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.1.2. Переход от одного вида уравнения прямой к другим видам уравнений

Пусть прямая задана каноническим уравнением

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}. \qquad (9)$$

Из уравнения имеем: координаты точки, через которую проходит прямая $M_0(2;\ -4)$ и $\vec{s}=\{3;\ -5\}$ – направляющий вектор прямой. Получим другие виды уравнений этой прямой.

1. *Параметрические уравнения.* Приравняем оба равенства в (9) к параметру t

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}=t,$$

откуда получаем

$$\frac{x-2}{3}=t, \qquad \frac{y+4}{-5}=t.$$

Окончательно $$\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-5t-4 \end{cases}. \qquad (10)$$

Из полученного видно, что коэффициентами перед t являются координаты направляющего вектора прямой.

2. Уравнение прямой, проходящей *через точку, перпендикулярно вектору* получается из уравнения (9), если решить его как пропорцию

$$-5(x-2)=3(y+4) \qquad \Rightarrow \qquad 5(x-2)+3(y+4)=0. \qquad (11)$$

3. *Общее уравнение* прямой получим, раскрыв скобки в предыдущем уравнении,

$$5x+3y+2=0. \qquad (12)$$

Отметим, что из двух последних уравнений можно заключить, что вектор нормали данной прямой имеет координаты $\vec{N}=\{5;\ 3\}$.

Замечание. Из предыдущего примера следует, что, если мы знаем направляющий вектор прямой $\vec{s}=\{m;\ n\}$, то для нахождения вектора нормали достаточно поменять местами координаты и у одной из них сменить знак $\vec{N} = \{n;\ -m\}$.

И наоборот, зная координаты вектора нормали $\vec{N} = \{A;\ B\}$, можно записать направляющий вектор $\vec{s} = \{B;\ -A\}$.

4. Уравнение прямой *с угловым коэффициентом.* Уравнение (9) можно записать в виде

$$(y+4) = -\frac{5}{3}(x-2). \tag{13}$$

Угловой коэффициент прямой равен $k = -\dfrac{5}{3}$. Раскрыв скобки, получим еще один вариант уравнения прямой с угловым коэффициентом

$$y = -\frac{5}{3}\,x - \frac{2}{3}. \tag{14}$$

Это же уравнение можно было получить и из общего уравнения $5x + 3y + 2 = 0$, выразив из него y.

Замечание. Из уравнения прямой с угловым коэффициентом также легко определяются вектор нормали прямой и ее направляющий вектор. Так, записав уравнение $y = 2x+5$ в виде $2x-y+5 = 0$, будем иметь вектор нормали $\vec{N} = \{2;\ -1\}$ и направляющий вектор $\vec{s} = \{1;\ 2\}$.

5. Уравнение прямой *"в отрезках"* получается из общего уравнения (12) следующим образом:
переносим свободный член уравнения в правую часть

$$5x + 3y = -2,$$

делим на него все члены уравнения, так чтобы в правой части получилась единица

$$\frac{5x}{-2} + \frac{3y}{-2} = 1 \quad\Rightarrow \frac{x}{-2/5} + \frac{y}{-2/3} = 1. \tag{15}$$

Из полученного уравнения видно, что прямая отсекает на оси OX отрезок $a = -2/5$, а на оси OY отрезок $b = -2/3$.

Замечание. В качестве исходного может быть и не каноническое, а любое другое уравнение прямой, из которого можно получать те, которые удобнее в использовании для решения конкретной задачи.

6. Например, исходная прямая задана параметрически.

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -5t - 4 \end{cases}. \tag{16}$$

Для получения *общего* уравнения выразим параметр t из выражения для x и подставим в выражение для y :

$$t = \frac{1}{3}(x-2), \qquad y = -5 \cdot \frac{1}{3}(x-2) - 4 \qquad \Rightarrow \qquad 5x + 3y + 2 = 0.$$

3.1.3. Задачи на прямую линию на плоскости

1) Построение прямых на плоскости.

Общий подход к решению задачи состоит в определении координат двух точек, через которые проходит данная прямая.

Задача 6. Построить прямые.

- 1. $l: \quad 3x + 2y - 6 = 0.$

Берем значение $x = 0$ и вычисляем значение $y = 3$. Получаем точку $M_1(0;3)$. Берем значение $y = 0$ и вычисляем значение $x = 2$. Получаем точку $M_2(2;0)$. Получили точки пересечения прямой с осями координат. По этим точкам легко построить прямую. (Рис.6.)

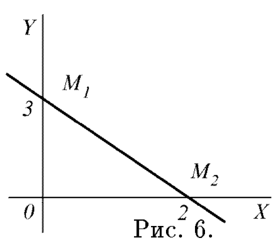


Рис. 6.

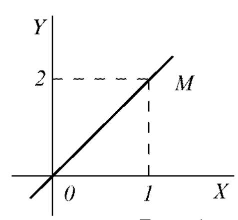


Рис. 7.

- 2. $l: \quad y = 2x.$

Прямая проходит через начало координат $O(0;0)$. Вторую точку прямой получим, взяв значение $x = 1$, тогда значение $y = 2$ и точка $(1;2)$. (Рис.7.)

- 3. $l: \quad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-4}.$

Прямая задана каноническим уравнением, поэтому координаты одной точки известны сразу $M_1(2;-1)$. Координаты второй точки получим, взяв в уравнении прямой $x = 5$ (чтобы получилось целочисленное значение). Вычисляем соответствующее значение $y = -5$. Таким образом, $M_2(5;-5)$. Строим прямую по двум точкам. (Рис.8.)

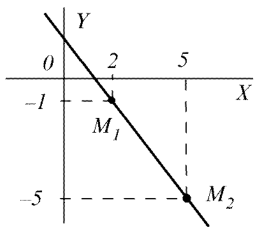


Рис. 8.

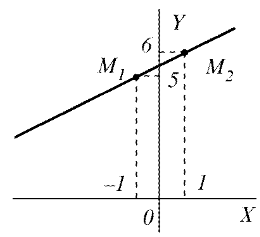


Рис. 9.

- 4. $l: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 5 \end{cases}.$

Прямая задана параметрически. Из уравнений имеем сразу координаты одной точки: $M_1(-1;5)$. (Рис. 9.) Координаты второй точки получим, взяв какое-либо значение параметра t и вычислив соответствующие значения x и y. Пусть $t = 1$, тогда $x = 2 - 1 = 1$, $y = 1 + 5 = 6$. Итак, $M_2(1;6)$.

- 5. $x - 5 = 0$

В уравнении отсутствует переменная y. Данная прямая проходит через точку $x = 5$ параллельно оси OY. (Рис.10.)

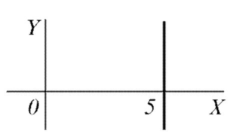


Рис. 10.

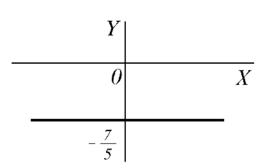


Рис. 11.

2) Составление уравнений прямых

Задача 7. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_o(2;-4)$: a) параллельно, в) перпендикулярно, c) под углом 45^o к прямой l : $3x-5y+2=0$.

Решение:

a) Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Исходная прямая задана общим уравнением, из которого следует, что нормальный вектор прямой $\vec{N}=\{3;-5\}$. Вектор нормали данной прямой может служить и нормалью к параллельной прямой. (Рис.12.)

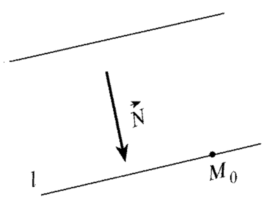


Рис. 12.

Взяв уравнение искомой прямой в виде:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0,$$

получим после подстановки координат точки $M_0(2;-4)$ и вектора нормали $\vec{N}=\{3;-5\}$ уравнение

$$3(x-2)-5(y+4)=0 \quad \text{или} \qquad 3x-5y-26=0.$$

b) Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. Из рисунка 12 видно, что вектор нормали исходной прямой служит направляющим вектором для перпендикулярной прямой $\vec{N}=\vec{s}=\{3;-5\}$. Таким образом для уравнения перпендикулярной прямой мы имеем точку $M_o(2;-4)$ и направляющий вектор. (Рис.13.)

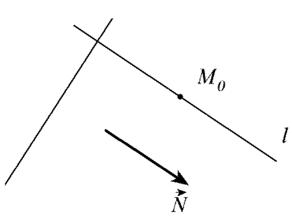


Рис. 13.

Используя уравнение искомой прямой в каноническом виде

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}$$

и подставляя в него координаты точки и направляющего вектора, получим

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5} \qquad \Rightarrow -5(x-2)=3(y+4) \qquad \Rightarrow \quad 5x+3y+2=0.$$

c) Составим уравнения прямых, проходящих через данную точку под углом 45^0 к данной прямой.

Решение. Из рисунка 14 видно, что через данную точку под углом 45^0 к данной прямой проходят две взаимно перпендикулярные прямые. Исходная прямая задана общим уравнением из которого ее нормальный вектор $\vec{N} = \{3; -5\}$. Создадим другой вектор, перпендикулярный данному и имеющий одинаковую с ним длину.

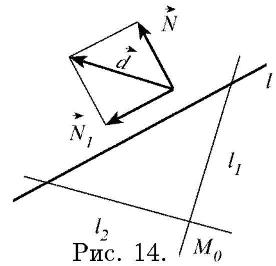


Рис. 14.

Для получения такого вектора достаточно в данном поменять местами координаты и у одной из них сменить знак: $\vec{N}_1 = \{5; 3\}$.

Векторы $\vec{N} = \{3; -5\}$ и $\vec{N}_1 = \{5; 3\}$ действительно равны по длине и взаимно перпендикулярны $(\vec{N} \cdot \vec{N}_1 = \{3; -5\}\{5; 3\} = 15 - 15 = 0)$. Вектор диагонали $\vec{d}$ квадрата, построенного на векторах $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$, образует с векторами $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$ угол в 45^o и служит нормальным вектором прямой l_1 и направляющим вектором прямой l_2. Этот вектор является суммой векторов $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$, поэтому $\vec{d} = \vec{N} + \vec{N}_1 = \{8; -2\}$.

Для составления уравнения прямой l_1 исходным будет уравнение $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$. После подстановки координат точки $M_o(2; -4)$ и координат нормального вектора $\vec{d} = \{A; B\} = \{8; -2\}$ получаем уравнение искомой прямой

$$8(x - 2) - 2(y + 4) = 0 \quad \text{или} \quad 4x - y - 12 = 0.$$

Так как прямая l_2 перпендикулярна к прямой l_1, то в качестве ее вектора нормали можно взять вектор $\vec{d}_2 = \{2; 8\}$. После подстановки координат точки $M_0(2; -4)$ и координат вектора $\vec{d}_2$ получаем уравнение прямой l_2

$$2(x - 2) + 8(y + 4) = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 + 4(y + 4) = 0.$$

Окончательно $x + 4y + 14 = 0$.

Замечание. Если исходная прямая задана уравнением другого вида, то нужно сначала привести его к общему уравнению, и далее решать задачу предложенным выше способом.

3) Задачи на взаимное расположение прямых

Прямые на плоскости могут быть параллельны, перпендикулярны или в общем случае пересекаться под каким-то углом. В тех случаях, когда прямые пересекаются, необходимо определять координаты точки пересечения и угол между прямыми. Кроме того, необходимо уметь проверять условия параллельности и перпендикулярности прямых. Отметим, что все эти задачи решаются средствами векторной алгебры, поэтому нужно уметь из уравнений прямых определять координаты либо векторов нормали, либо направляющих векторов, можно также использовать угловые коэффициенты прямых. В таблицах 3.2.1.-3.2.3. приведены различные формулы для определения угла, образованного парой пересекающихся прямых, условия параллельности и перпендикулярности прямых для разных случаев задания прямой. При решении задач на взаимное расположение прямых рекомендуется привести оба уравнения к одному виду: либо к общему, либо к каноническому, либо к уравнению с угловым коэффициентом.

Нахождение точки пересечения двух прямых

Задача 8. Найти точку пересечения прямых:

$$l_1 : \frac{x+4}{-2} = \frac{y-8}{3}; \qquad l_2 : 3x + 6y = 1.$$

Решение. 1-й способ. Для нахождения точки пересечения прямых необходимо решить систему из двух уравнений этих прямых. Эту систему лучше решать, если предварительно перевести каноническое уравнение прямой l_1 в параметрический вид. Получим систему

$$\begin{cases} \begin{cases} x = -2t - 4 \\ y = 3t + 8 \end{cases} \\ 3x + 6y - 1 = 0 \end{cases},$$

для решения которой в уравнение прямой l_2 подставляем выражения для x и y через t из уравнений первой прямой и находим значение параметра t, соответствующее точке пересечения

$$3(-2t-4) + 6(3t+8) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12t + 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{35}{12}.$$

Подставим полученное значение t в уравнения прямой l_1 и получим координаты точки пересечения

$$x = 70/12 - 4 = 11/6, \quad y = -105/12 + 8 = -3/4, \text{ или } \quad M\left(\frac{11}{6}; -\frac{3}{4}\right).$$

2-й способ. При решении данной задачи можно пользоваться общими уравнениями прямых, поэтому приведём каноническое уравнение прямой l_1 к общему виду:

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y-8}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x + 12 = -2y + 16 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y - 4 = 0.$$

Для нахождения точки пересечения прямых необходимо найти решение системы

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{11}{6} \\ y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Таким образом, точка пересечения прямых $M\left(\frac{11}{6}; -\frac{3}{4}\right)$.

Нахождение угла, образованного парой пересекающихся прямых

Задача 9. Найти косинус угла, образованного парой пересекающихся прямых $l_1: \; 3x + 2y - 4 = 0, \quad l_2: \; 3x + 6y = 1.$

Решение. Косинус угла между прямыми, заданными общими уравнениями, находим как косинус угла между их нормальными векторами (Рис. 15.) (см. формулу в таблице 3.2.1.).

$$\cos\varphi = \cos(\vec{N}_1, \ \vec{N}_2) = \pm\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\ \vec{N}_1 \ || \ \vec{N}_2 \ |} =$$

$$= \pm\frac{\{3;2\}\{3;6\}}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{3^2+6^2}} =$$

$$= \pm\frac{3\cdot 3 + 2\cdot 6}{\sqrt{9+4}\sqrt{9+36}} = \pm\frac{21}{\sqrt{13}\sqrt{45}}.$$

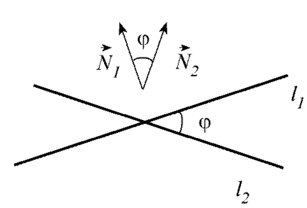


Рис. 15.

Заметим, что прямые образуют между собой два угла, один из которых острый, а другой тупой. Знак $\pm$ в выражении для $\cos\varphi$ соответствует тому, либо другому углу. (По тригонометрическим таблицам, зная $\cos\varphi$, можно найти соответствующее значение угла φ.)

Замечание. Если прямые заданы каноническим или параметрическими уравнениями, из которых имеем координаты направляющих векторов
$\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Тогда углом между прямыми будет угол между направляющими векторами. Задача практически сводится к предыдущей (таблицы 3.2.2) и находится косинус угла между прямыми.

Если же прямые заданы так, что известны их угловые коэффициенты, то находим тангенс угла между прямыми, а по тригонометрическим таблицам значение угла. Например,

пусть $l_1:\ y = 4x-7$, $l_2:\ y=-6x+3$. Тогда $k_1 = 4$, $k_2 = -6$. Берем формулу нахождения тангенса угла между двумя прямыми (таблица 3.2.3)

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{-6-4}{1+4(-6)} = \frac{-10}{-23} = \frac{10}{23}.$$

Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

Задача 10. Рассмотрим несколько пар прямых

- 1. $l_1:\quad 10x+6y-1=0,\qquad\qquad l_2:\quad \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y}{5}.$

Эти прямые параллельны, так как коллинеарны их вектора нормали

$$\vec{N}_1 = \{10;\ 6\},\qquad \vec{s}_2 = \{-3;\ 5\} \quad\Rightarrow\quad \vec{N}_2 = \{5;\ 3\}.$$

Вектора $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ коллинеарны, так как их одноименные координаты пропорциональны: $\dfrac{10}{5} = \dfrac{6}{3}$.

- 2. $l_1:\quad y=-3x+7,\qquad\qquad l_2:\quad \begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t \end{cases}.$

Эти прямые параллельны, так как имеют один и тот же вектор нормали

$$\vec{N}_1 = \{3;\ 1\}, \qquad \vec{s}_2 = \{-1;\ 3\} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_2 = \{3;\ 1\}.$$

- 3. $l_1: \quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1, \qquad\qquad l_2: \quad y = \dfrac{2}{3}x + 1.$

Эти прямые перпендикулярны, так как взаимно перпендикулярны их вектора нормали. Действительно, запишем эти уравнения в виде

$$l_1: \quad 3x + 2y = 6, \qquad\qquad l_2: \quad 2x - 3y + 3 = 0.$$

$$\vec{N}_1 = \{3;\ 2\}, \qquad \vec{N}_2 = \{2;\ -3\},$$

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{N}_1 \ \perp \ \vec{N}_2.$$

- 4. $l_1: \quad \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-2}{4}, \qquad\qquad l_2: \quad 5x + 4y - 1 = 0.$

$$\vec{s}_1 = \{5;\ 4\}, \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 = \{4;\ -5\}, \qquad \vec{N}_2 = \{5;\ 4\}.$$

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) = 0.$$

Вектора $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ взаимно перпендикулярны, а значит перпендикулярны и прямые.

Нахождение проекции точки на прямую

Проекцией точки $M(x;y)$ на прямую l будет точка пересечения прямой, проходящей через точку $M(x;y)$ перпендикулярно прямой l, с этой прямой l. (Рис.16.) Поэтому решение задачи будет состоять из двух этапов:

a) Составление уравнения прямой l_1, проходящей через точку $M(x;y)$ перпендикулярно прямой l (эта задача подробно рассмотрена выше).

b) Нахождение точки пересечения двух прямых l и l_1 (решение такой задачи мы также уже рассмотрели).

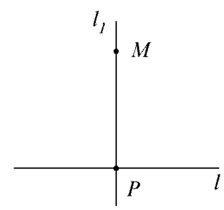


Рис. 16.

1.3.4. Нахождение расстояния от точки до прямой

Задача 11. Найти расстояние от точки $M(2;-3)$ до прямой $l: \ 3x-4y-8=0$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления расстояния от данной точки $M(x_1;y_1)$ до данной прямой $Ax+By+C=0$.

$$d=\frac{\mid Ax_1+By_1+C \mid}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Формула говорит о том, что для определения расстояния от точки до прямой необходимо в левую часть общего уравнения прямой вместо текущих координат подставить координаты данной точки, полученное число взять по абсолютной величине и разделить на длину нормального вектора прямой. Получаем

$$d=\frac{\mid 3\cdot 2-4\cdot(-3)-8 \mid}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

Замечание. Если прямая задана уравнением другого вида, то его следует привести к общему виду и использовать формулу расстояния от точки до прямой.

Задача 12. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$l_1: \quad 12x-5y+10=0 \qquad \text{и} \qquad l_2: \quad 12x-5y+2=0.$$

Решение. Расстоянием между двумя параллельными прямыми является расстояние от какой-либо точки одной прямой до второй прямой. При этом для нахождения точки на прямой достаточно задать значение одной из координат и из уравнения прямой получить значение другой.

Положим $x_1=0$. Тогда $-5y+10=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=2.$

Теперь воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки $M(0;2)$ до прямой $12x-5y+2=0$.

$$d=\frac{\mid 12\cdot 0-5\cdot 2+2 \mid}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{\mid -8 \mid}{\sqrt{169}}=\frac{8}{13}.$$

Составление уравнений биссектрис углов между прямыми

Задача 13. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $l_1: \quad 3x + 2y - 4 = 0, \quad l_2: \quad 3x + 6y - 1 = 0.$

Решение. Очевидно, что биссектрис, как и углов тоже будет две. (Рис.17.) Воспользуемся формулой вычисления расстояния от данной точки $M(x_1; y_1)$ до данной прямой $Ax + By + C = 0$
Пусть $M(X; Y)$ есть текущая точка биссектрисы. Используем свойство, что биссектриса угла есть множество точек, равноудалённых от сторон угла. Запишем равенство расстояний от текущей точки $M(X; Y)$ до одной и второй прямой.

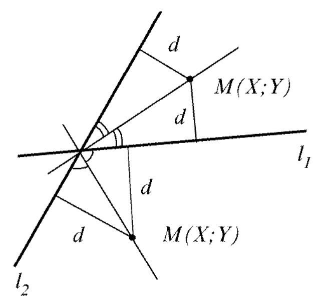


Рис. 17.

$$d = \frac{|\ Ax_1 + By_1 + C\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\frac{|\ 3X + 2Y - 4\ |}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|\ 3X + 6Y - 1\ |}{\sqrt{3^2 + 6^2}}.$$

Откуда получаем уравнения двух биссектрис острого и тупого углов между прямыми (заменяем одновременно координаты X, Y на обычные x, y)

$$3x + 2y - 4 = \pm\sqrt{\frac{13}{45}}(3x + 6y - 1).$$

Так как $\sqrt{13/45} \approx 0.54$, то уравнение первой биссектрисы

$3x+2y-4 = 0.54(3x+6y-1), \qquad 3x+2y-4 = 1.62x+3.24y-0.54,$

$$1.38x - 1.24y - 3.46 = 0.$$

Уравнение второй биссектрисы

$3x+2y-4 = -0.54(3x+6y-1), \qquad 3x+2y-4 = -1.62x-3.24y+0.54$

$$4.62x + 5.24y - 4.54 = 0.$$

3.2. Кривые второго порядка

3.2.1. Канонические уравнения кривых второго порядка, их свойства и построение

Кривой 2-го порядка называется линия, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат есть уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C не равны нулю одновременно.

Уравнение (1) можно разбить на две группы слагаемых:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad - \text{квадратичная часть,}$$

$$Dx + Ey + F \quad - \text{линейная часть.}$$

Заметим, что квадратичная часть в уравнении кривой 2-го порядка всегда присутствует, а линейная часть может и отсутствовать (полностью или частично).

Геометрическим образом уравнения (1) служат три линии - либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо их вырожденные варианты, причем определить тип кривой можно сразу по коэффициентам квадратичной формы, а именно:

если $AC - B^2 > 0$ - эллиптический,
если $AC - B^2 < 0$ - гиперболический,
если $AC - B^2 = 0$ - параболический.

Для построения кривой необходимо сначала упростить исходное уравнение, или, как говорят, привести его к каноническому виду. Это достигается поворотом и параллельным переносом системы координат в новое начало, что будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим канонические уравнения кривых 2-го порядка, их основные свойства и построение.

Возможные случаи канонических уравнений и соответствующих им геометрических образов приведены в таблице.(Стр.130-132.)

1. Эллипс

О п р е д е л е н и е. *Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная* $2a$. *(Эта величина больше расстояния между фокусами, равного* $2c$*).*

Пусть произвольная точка кривой имеет координаты $M(x;y)$, а фокусы лежат на оси OX и имеют координаты $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$.
Тогда согласно определению можно записать

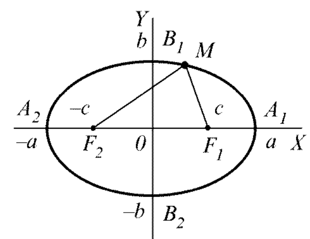


Рис. 53.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

После преобразований получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с центром в начале координат $O(0;0)$ и полуосями: a (откладывается по оси OX влево и вправо от центра) и b (откладывается по оси OY вверх и вниз от центра). Причем имеется следующая связь между размерами осей $2a$, $2b$ и расстоянием между фокусами $2c$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Отношение $\epsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* и характеризует форму (степень сжатия) эллипса. Так как для эллипса имеет место: $a > c$, то его эксцентриситет $\epsilon < 1$.

Эллипс - кривая, обладающая центральной и осевой симметрией. Для построения эллипса достаточно знать координаты центра и четырех вершин $A_1(a;0)$; $A_2(-a;0)$; $B_1(0;b)$; $B_2(0;-b)$. (рис. 53.)

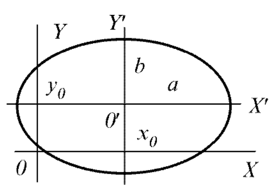


Рис. 54.

Уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

является каноническим уравнением эллипса с центром в точке $O'(x_0;y_0)$ и полуосями: a и b.

Для построения такого эллипса необходимо сначала нанести положение центра эллипса на координатую плоскость, провести через центр оси симметрии $O'X'$ и $O'Y'$ и отложить полуоси a и b от этого центра как и в предыдущем случае.

Построим эллипсы.

• **1**. $4x^2 + 3y^2 = 12.$

Получим каноническое уравнение эллипса, разделив обе части исходного уравнения на 12, чтобы в правой части уравнения стояла 1.

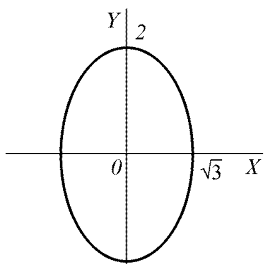


Рис. 55.

$$\frac{4x^2}{12} + \frac{3y^2}{12} = 1, \qquad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Из полученного уравнения имеем размеры полуосей $a = \sqrt{3}$, $b = 2$.

Строим эллипс. (Рис. 55.)

• **2**. $x = -\sqrt{9 - 4y^2}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения и проведем несложные преобразования

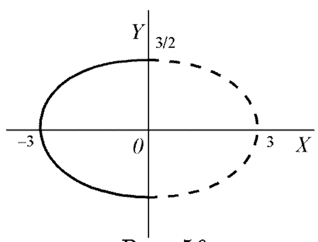


Рис. 56.

$$x^2 = 9 - 4y^2, \qquad x^2 + 4y^2 = 9,$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/4} = 1.$$

Из полученного уравнения имеем размеры полуосей эллипса $a = 3$, $b = 3/2$.

Но исходное уравнение будет определять не всю кривую, а только ее левую половину, так как $x = -\sqrt{9 - 4y^2} < 0$. (Рис. 56.)

• **3**. $y - 1 = \sqrt{4 - 2x^2}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения и проведем несложные преобразования

$$(y-1)^2 = 4 - 2x^2, \qquad 2x^2 + (y-1)^2 = 4, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Из полученного уравнения имеем размеры полуосей $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ и координаты центра $O'(0;\ 1)$.
Строим эллипс. Отмечаем в системе координат точку O', проводим через нее новые оси координат $O'X'$, $O'Y'$ и откладываем на них размеры полуосей.

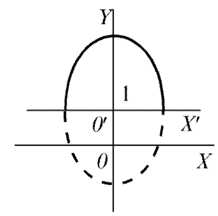


Рис. 57.

Но исходное уравнение будет определять не всю кривую, а только ее верхнюю половину, точки которой лежат выше оси $O'X'$, так как исходному уравнению удовлетворяют только те точки, для которых $y - 1 > 0$ или $y > 1$. (Рис. 57.)

2. Окружность

О п р е д е л е н и е. *Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.*

Пусть произвольная точка кривой имеет координаты $M(x; y)$, а центр находится в начале координат. (Рис. 58.) Тогда согласно определению можно записать $|OM| = r$ или

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

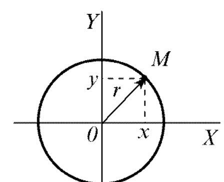


Рис. 58.

Для построения окружности достаточно знать координаты центра и радиус r.
Пусть центр окружности находится в точке $0'(x_0;\ y_0)$.

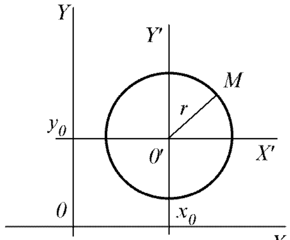


Рис. 59.

Тогда, записывая формулу расстояния между двумя точками, получим $|M_0M| = r$, или

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Итак, уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

является каноническим уравнением

окружности с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и радиусом r. Для построения такой окружности необходимо сначала нанести положение центра O' на координатую плоскость, провести через него оси $O'X'$ и $O'Y'$ и строить окружность радиуса r, как и в предыдущем случае. (Рис. 59.)

Отметим, что окружность является частным случаем эллипса с одинаковыми полуосями, дествительно: если в уравнении эллипса положить $a = b = r$, то получим уравнение окружности $x^2+y^2 = r^2$.

Окружность, также, как и эллипс, – кривая, обладающая центральной симметрией.

Окружность можно рассматривать как предельный случай эллипса, у которого фокусы слились в одну точку-центр окружности, и поэтому расстояние между форкусами равно нулю.
Эксцентриситет окружности $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{0}{r} = 0.$

Построим окружности.

- **1**. $x^2 + y^2 = 4.$

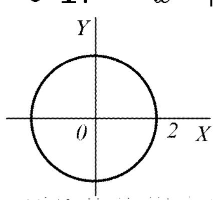


Рис. 60.

Из уравнения имеем, что центр окружности – в начале координат, радиус $r = 2$. Строим окружность. (Рис. 60.)

- **2**. $x = 2 + \sqrt{1 - y^2}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения и проведем несложные преобразования

$$(x-2)^2 = 1 - y^2 \qquad (x-2)^2 + y^2 = 1.$$

Из уравнения имеем, что центр окружности – в точке $0'(2;\ 0)$, радиус $r = 1$.

Строим окружность, предварительно отметив положение центра O' и проведя через него новые оси $O'X'$ и $O'Y'$. Но исходное уравнение будет определять не всю кривую, а только ее правую половину, точки которой лежат правее оси $O'Y'$, что следует из исходного уравнения: (Рис. 61.)

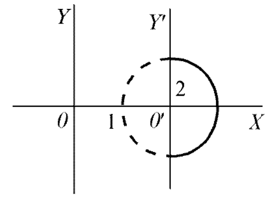


Рис. 61.

$$x = 2 + \sqrt{1-y^2}, \quad \text{так} \quad \text{как} \quad \sqrt{1-y^2} > 0, \qquad \text{то} \quad x > 2.$$

3. Гипербола

О п р е д е л е н и е. *Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная* $2a$. (Эта величина меньше расстояния между фокусами, равного $2c$).

Пусть произвольная точка кривой имеет координаты $M(x;y)$, а фокусы лежат на оси OX и имеют координаты $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. (Рис. 62.) Тогда, согласно определению, можно записать

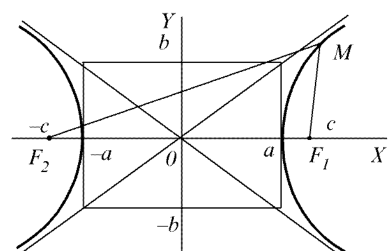


Рис. 62.

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a.$$

После преобразований получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с центром в начале координат $O(0;0)$ и полуосями:

действительной a (откладывается по оси OX влево и вправо от центра) и

мнимой b (откладывается по оси OY вверх и вниз от центра).

Имеется следующая связь между размерами осей $2a$, $2b$ и расстоянием между фокусами $2c$

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Поскольку для гиперболы характерно, что $a < c$, то эксцентриситет гиперболы $\epsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

Гипербола – кривая, симметричная относительно начала координат и координатных осей.

В отличие от эллипса гипербола – это незамкнутая кривая, имеющая *асимптоты* – прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются. Уравнения асимптот

$$y = \frac{b}{a}\,x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}\,x.$$

Для построения гиперболы :

a) строим основной прямоугольник гиперболы с центром в начале координат и сторонами $2a$ на оси OX и $2b$ на оси OY,

b) через центр и вершины прямоугольника проводим прямые (асимптоты гиперболы),

c) отмечаем вершины гиперболы (ими служат точки пересечения основного прямоугольника с действительной осью гиперболы) на оси OX,

d) строим гиперболу (рис. 62.)

Рассмотрим другие варианты уравнений гиперболы.

Уравнение $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

является каноническим уравнением *сопряженной гиперболы* с центром в начале координат $O(0;0)$ и полуосями: действительной b и мнимой a. Вершины такой гиперболы лежат на оси OY (стр. 131, п.8.)

Определить, какая ось действительная, а какая – мнимая, можно легко по уравнению гиперболы. Знак плюс перед квадратом переменной в каноническом уравнении указывает на действительную ось.

Уравнение
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
является каноническим уравнением гиперболы с центром в точке

$O'(x_0; y_0)$ и полуосями: действительной a и мнимой b (стр. 131, п.9.).

Уравнение

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

является каноническим уравнением гиперболы с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и полуосями: действительной b и мнимой a .

Для построения таких гипербол необходимо сначала нанести положение центра O' на координатную плоскость, провести через центр оси OX' и OY' и построить основной прямоугольник $2a$ x $2b$ с этим центром. Далее проводим диагонали этого прямоугольника, отмечаем вершины на действительной оси (в зависимости от вида исходного уравнения) и строим гиперболу, как и в основном случае.

Гипербола с одинаковыми размерами полуосей $a = b$ называется *равнобочной*

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{или} \quad -x^2 + y^2 = a^2.$$

Гипербола, асимптотами которой являются оси координат, имеет уравнение

$$xy = \pm a.$$

Постороим гиперболы.

• **1**. $4x^2 - 3y^2 = 12.$

Получим каноническое уравнение гиперболы, разделив обе части исходного уравнения на 12, чтобы в правой части уравнения стояла 1.

$$\frac{4x^2}{12}-\frac{3y^2}{12}=1, \qquad \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Из полученного уравнения имеем размеры полуосей
$a=\sqrt{3}$ – действительная, $b = 2$ – мнимая.

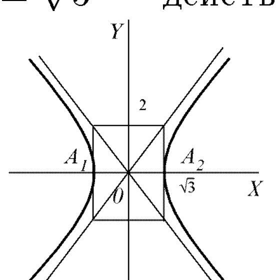


Рис. 63.

Строим прямоугольник гиперболы, проводим его диагонали, отмечаем вершины, они лежат на оси OX в точках $A_1(-\sqrt{3}; 0)$, $A_2(+\sqrt{3}; 0)$ и ведем ветви гиперболы от вершин к асимптотам. (Рис. 63.)

• **2.** $\quad y = -3 - \sqrt{8 + 4x^2}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения и проведем несложные преобразования

$$(y+3)^2 = 8 + 4x^2, \qquad -4x^2 + (y+3)^2 = 8, \quad -\frac{x^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1.$$

Из полученного уравнения имеем размеры полуосей : $a = \sqrt{2}$ – мнимая, $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ – действительная и координаты центра $O'(0;\ -3)$.

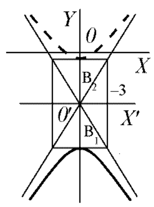


Рис. 64.

Строим гиперболу. Сначала отмечаем положение центра, проводим через него оси координат $O'X'$ и $O'Y'$, в этих осях строим прямоугольник гиперболы по определенным по уравнению размерам, проводим его диагонали, отмечаем вершины, они лежат на оси $O'Y'$ в точках $B_1(0;\ -3-2\sqrt{2})$, $\quad B_2(0;\ -3+2\sqrt{2})$ и ведем ветви гиперболы от вершин к асимптотам. (Рис. 64.)

Но исходное уравнение будет определять не всю кривую, а только ее нижнюю половину, так как $y < -3$.

4. Парабола

О п р е д е л е н и е. *Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.*

Директриса параболы определяется уравнением $x = -p/2$, $(p > 0)$, фокус расположен в точке $F(p/2;\ 0)$. (Рис. 65.) Записывая равенство расстояний между произвольной точкой кривой $M(x;y)$ и фокусом и между точкой $M(x;y)$ и директрисой, получим

$$\sqrt{(x-p/2)^2 + y^2} = x + p/2.$$

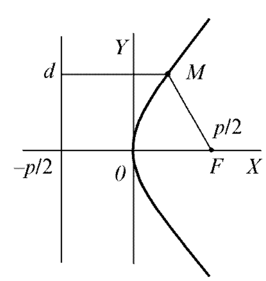


Рис. 65.

Откуда после преобразований получим
каноническое уравнение параболы, симметричной относительной оси OX и с вершиной в начале координат

$$y^2 = 2px.$$

Параметр $2p$ характеризует ширину параболы.

Аналогичное уравнение можно получить для параболы, симметричной относительно оси OY.

Таким образом, можно выделить два основных вида уравнений параболы.

1. *Парабола с осью симметрии* OX : $\quad y^2 = \pm 2px.$

Вершина параболы в начале координат $O(0;0)$, знак "плюс" соответствует параболе с ветвями, направленными вправо, а знак "минус" соответствует параболе с ветвями, направленными влево (рис. 66.)

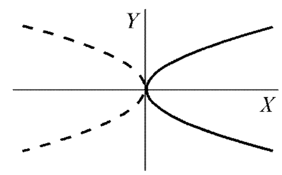


Рис. 66.

$$\text{Уравнение} \qquad (y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$$

представляет параболу с вершиной в точке $O'(x_0; y_0)$ (стр.132, п.12).

2. *Парабола с осью симметрии* OY : $\quad x^2 = \pm 2py.$

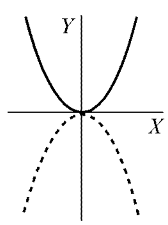


Рис. 67.

Вершина параболы в начале координат $O(0;0)$, знак "плюс" соответствует параболе с ветвями, направленными вверх, а знак "минус" соответствует параболе с ветвями, направленными вниз (рис. 67.).

Уравнение $\qquad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$
представляет параболу с вершиной в точке $O'(x_0; y_0)$ (стр. 132, п.14).

Замечание. Каноническое уравнение параболы отличается от предыдущих типов уравнений тем, что в нем отсутствует квадрат одной переменной.

Для построения параболы необходимо знать:

1) координаты вершины,

2) ось симметрии (она параллельна той оси, координата которой входит в уравнение в первой степени),

3) направление ветвей.

Построим параболы.

- **1**. $y - 1 - x^2 = 0.$

В данном уравнении отсутствует квадрат переменной y, значит оно определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси OY. Запишем исходное уравнение в каноническом виде, для этого необходимо разнести переменные x и y в разные части уравнения

$$x^2 = (y - 1).$$

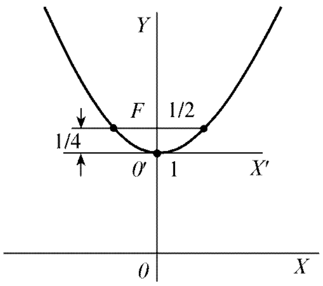


Рис. 68.

Таким образом, вершина параболы находится в точке $O'(0;\ 1)$, ось симметрии параллельна оси OY и ветви направлены вверх. При построении наносим на координатную плоскость точку O', проводим новые оси $O'X'$ и $O'Y'$, и рисуем параболу. (Рис. 68.)

Для более точного построения начального участка параболы (в районе вершины) можно привлечь параметр параболы p.
Сравнивая наше уравнение $x^2 = (y - 1)$ с соответствующим каноническим $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, определяем, что $2p = 1$, $p = 1/2$. Теперь от вершины параболы в направлении ее ветвей на оси OY откладываем отрезок $p/2 = 1/4$ (получаем положение фокуса параболы), а от этой точки влево и вправо в перпендикулярном направлении отрезки $p = 1/2$. Таким образом, кроме вершины параболы мы получим еще две точки, и начальный участок будет более точным для нашего схематичного построения. Ширина этого начального участка как раз и получается равной $2p = 1-$ коэффициенту при y в исходном уравнении.

- **2**. $y = 1 - 2\sqrt{x}.$

Преобразуем исходное уравнение

$$y - 1 = -2\sqrt{x} \qquad (y - 1)^2 = 4x.$$

В данном уравнении отсутствует квадрат переменной x, значит оно определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси OX.

Таким образом, вершина параболы находится в точке $O'(0;\ 1)$, ось симметрии параллельна оси OX и ветви направлены вправо.
При построении наносим на координатную плоскость точку O', проводим новые оси $O'X'$ и $O'Y'$, и рисуем параболу. (Рис. 69.)

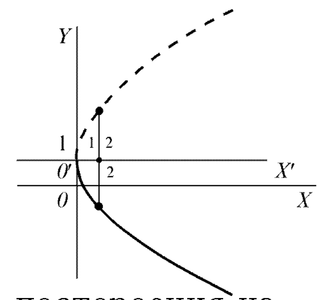


Рис.69.

Параметр $p = 2$ используем для более точного посторoения начального участка параболы (см. рисунок 69).
Но исходное уравнение будет определять не всю кривую, а только ее нижнюю половину, точки которой ниже оси $O'X'$, так как из исходного уравнения следует, что $y < 1$.

• **3**. $2y + 3x^2 = 1$.

Преобразуем уравнение к каноническому виду

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0).$$

$$3x^2 = 1 - 2y, \qquad 3x^2 = -2(y - 1/2), \qquad x^2 = -\frac{2}{3}\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

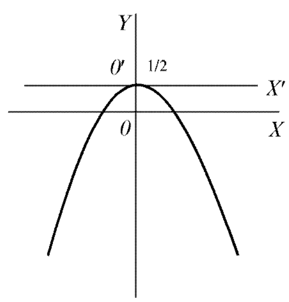


Рис. 70.

Данное уравнение определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси OY. Вершина параболы находится в точке $O'(0;\ 1/2)$, ветви направлены вниз (на что указывает знак минус в правой части уравнения). При построении наносим на координатную плоскость точку O', проводим новые оси $O'X'$ и $O'Y'$, и рисуем параболу. (Рис. 70.)

5. Вырожденные варианты кривых 2-го порядка

Отметим, что не всегда преобразованное уравнение кривой 2-го порядка отображает реальную кривую. Возможны варианты вырожденных кривых (стр. 130-132, п.п. 5, 6, 10, 15, 16).

Уравнения эллиптического типа:

1. Уравнение $x^2 + y^2 - 10y + 25 = 0$ после преобразований приведется к виду $x^2 + (y - 5)^2 = 0$, что соответствует каноническому уравнению окружности с центром в точке $O'(0;5)$ и радиусом $r=0$. Фактически мы получили, что исходное уравнение определяет не кривую 2-го порядка, а одну точку $O'(0;5)$.

2. Уравнение $3x^2+2y^2-6x+8y+17=0$ после преобразований приведется к виду

$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{3}=-1.$$

Так как сумма квадратов не может равняться отрицательному числу, то данное уравнение не имеет реального геометрического образа, и называется уравнением мнимого эллипса.

Уравнение гиперболического типа:

3. Уравнение $y^2-4x^2-4y-24x-32=0$ после преобразований приведется к виду $(y-2)^2-4(x+3)^2=0$,
что можно записать в виде $(y-2)=\pm 2(x+3)$.

Уравнение 2-го порядка в данном случае является уравнением двух пересекающихся прямых

$$(y-2)=2(x+3) \quad \text{и} \quad (y-2)=-2(x+3).$$

Уравнения параболического типа:

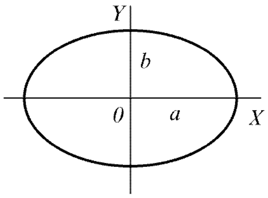
4. Уравнение $y^2-4xy+4x^2=1$ преобразуется к виду
$(y-2x)^2=1$ или $(y-2x)=\pm 1$,
что геометрически изображается парой параллельных прямых $y=2x\pm 1$.

5. Уравнение $9y^2+6xy+x^2=0$ преобразуется к виду
$(3y+x)^2=0$ или $3y+x=0$,
что соответствует одной прямой $y=-x/3$.

Таблица кривых 2-го порядка

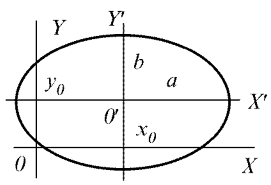
1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



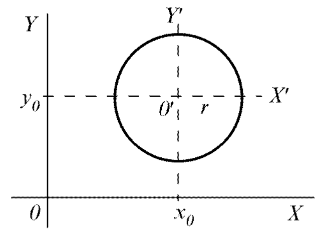
2. Смещенный эллипс

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$



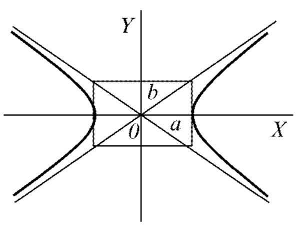
3. Смещенная окружность

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$$



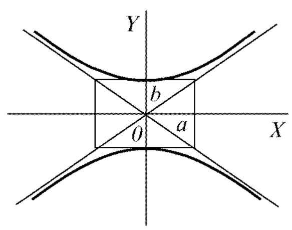
4. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



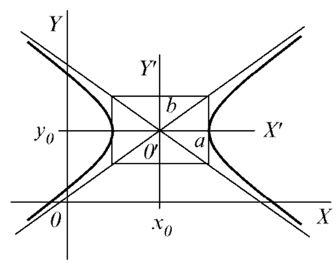
5. Сопряжённая гипербола

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



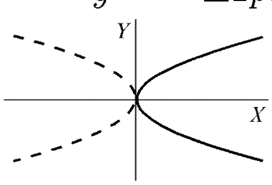
6. Смещённая гипербола

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$



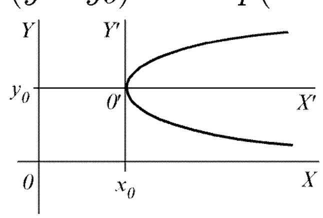
7. Парабола

$$y^2=\pm 2px$$



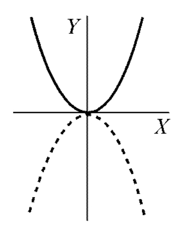
8. Смещенная парабола

$$(y-y_o)^2=2p(x-x_o)$$



9. Парабола

$$x^2=\pm 2py$$



3.2.2. Приведение общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду

Приступим к построению кривых 2-го порядка по их уравнениям. Наиболее простые ситуации были рассмотрены выше. Если исходное уравнение не является каноническим, то необходимо проделать преобразования, приводящие его к каноническому виду. Наиболее просто это осуществляется в тех случаях, когда исходное уравнение не содержит члена с произведением $x\,y$. Приведение этих уравнений к каноническому виду осуществляется путём параллельного переноса системы координат в новое начало.

Если же уравнение содержит член с произведением $x\,y$, то приведение к каноническому виду требует более сложных преобразований, состоящих не только в параллельном переносе системы координат в новое начало, но и в повороте системы координат на некоторый угол. Рассмотрим эти два случая.
Остановимся подробно лишь на вопросе о приведении к каноническому виду уравнений, не содержащих произведения $x\,y$

Рассмотрим уравнения кривых 2-го порядка вида

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Преобразование уравнения к каноническому виду в этом случае состоит в выделении полных квадратов.

Вспомним формулу квадрата суммы (разности) двух чисел

$$x^2 \pm 2 \cdot x \cdot a + a^2 = (x \pm a)^2.$$

Из формулы видно, что коэффициент при первой степени x равен удвоенному второму слагаемому. Поэтому для того, чтобы выражение $x^2 \pm kx$ дополнить до полного квадрата, необходимо сначала определить второе число, разделив пополам коэффициент при x, а затем прибавить и отнять (чтобы не нарушить равенство) квадрат этого числа. Рассмотрим эту процедуру на примерах.

Построим кривые.

• **1**. $x^2+y^2+3x=0.$

Запишем уравнение в виде $x^2+3x+y^2=0.$ Дополняем до полного квадрата: для этого делим пополам коэффициент при первой степени x и определяем, что второе число равно 1.5, затем прибавляем и вычитаем квадрат этого числа

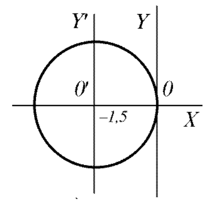


Рис. 71.

$$(x^2+2\cdot 1.5\cdot x+1.5^2)-1.5^2+y^2=0.$$

Выражение $(x^2+2\cdot 1.5\cdot x+1.5^2)$ представляет собой полный квадрат $(x+1.5)^2$, поэтому окончательно получим каноническое уравнение

$$(x+1.5)^2+y^2=1.5^2$$

Геометрическим образом полученного уравнения служит окружность с центром в точке $O'(-1.5;0)$ и радиусом $R=1.5$. (Рис. 71.)

• **2**. $2x^2-4x+y^2-10y+15=0.$

Действуем по аналогичной схеме: (коэффициенты при квадратах переменных необходимо вынести за скобки и в них проводить выделение полного квадрата)

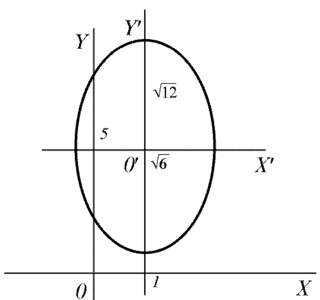


Рис. 72.

$$2(x^2-2x)+(y^2-10y)+15=0.$$

Для первой скобки второе число, квадрат которого нужно добавить и отнять, равно 1, а для второй скобки это число 5.

$$2(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)+(y^2-2\cdot 5\cdot y+5^2-5^2)+15=0,$$

$$2(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2)-2\cdot 1^2+(y^2-2\cdot 5\cdot y+5^2)-5^2+15=0,$$

$$2(x-1)^2-2+(y-5)^2-25+15=0,$$

$$2(x-1)^2+(y-5)^2=12 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(x-1)^2}{6}+\frac{(y-5)^2}{12}=1.$$

Это уравнение определяет эллипс с центром в точке $O'(1;5)$ и полуосями $a=\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{12}$. (Рис. 72.)

• **3**. $y = 6 - \sqrt{x^2 + 6x + 13}$.

Перенесем число 6 в левую часть уравнения

$$y - 6 = -\sqrt{x^2 + 6x + 13}.$$

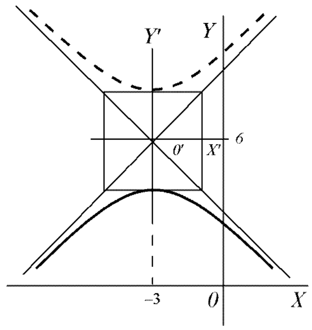


Рис. 73.

Теперь возведём обе части уравнения в квадрат

$$(y-6)^2 = x^2 + 6x + 13.$$

Дополняем в правой части выражение до полного квадрата

$$(y-6)^2 = x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 - 3^2 + 13.$$

$$(y-6)^2 = (x+3)^2 - 9 + 13 \qquad \Rightarrow \qquad (y-6)^2 - (x+3)^2 = 4.$$

$$-\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1.$$

Геометрическим образом полученного уравнения служит гипербола с центром в точке $O'(-3;6)$ и полуосями – мнимой $a = 2$ и действительной $b = 2$. Однако, исходное уравнение определяет не всю гиперболу, а только её нижнюю половину, т.к. из исходного уравнения видно, что $y < 6$. (Рис. 73.)

• **4**. $2y = -3x^2 + 8x + 2$.

$2y = -3(x^2 - 8/3x) + 2$,

$2y = -3(x^2 - 8/3x + 16/9 - 16/9) + 2$,

$2y = -3(x - 4/3)^2 + 16/3 + 2$,

$2y - 22/3 = -3(x - 4/3)^2$,

$2(y - 11/3) = -3(x - 4/3)^2$,

$(x - 4/3)^2 = -\dfrac{2}{3}(y - 11/3)$.

Геометрическим образом полученного уравнения служит парабола с вершиной в точке

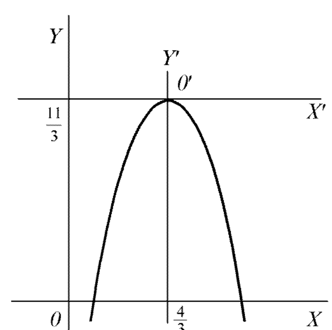


Рис. 74.

$O'(4/3;11/3)$, ось симметрии которой параллельна оси OY и ветвями, направленными вниз. (Рис. 74.)

В заключение отметим, что определить тип кривой по уравнению, в котором отсутствует произведение переменных xy, можно сразу по следующим признакам:

О к р у ж н о с т ь – наличие суммы квадратов переменных и одинаковые коэффициенты при при них.

Э л л и п с – наличие суммы квадратов переменных и разные коэффициенты при них.

Г и п е р б о л а – наличие разности квадратов переменных.

П а р а б о л а – отсутствие квадрата одной переменной.

Задачи на составление уравнений кривых

Задача 1. Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5;\ 0)$ относятся как $2:1$.

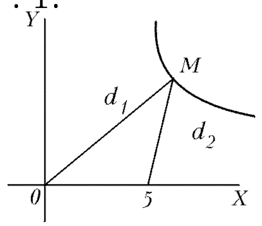


Рис. 79.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная (текущая) точка кривой. Согласно условию $\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{1}$ или $d_1 = 2\,d_2$.
Используя формулу расстояния между двумя точками
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$,

получим $d_1 = \mid OM \mid = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$.

$d_2 = \mid AM \mid = \sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$.

Тогда $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-5)^2+y^2}$.

Проведем необходимые преобразования

$$x^2+y^2=4(x-5)^2+4y^2, \qquad x^2+y^2=4x^2-40x+100+4y^2,$$

$$3x^2-40x+3y^2+100=0,$$

$$3\left(x^2-\frac{40}{3}x+\left(\frac{20}{3}\right)^2-\left(\frac{20}{3}\right)^2\right)+3y^2+100=0$$

$$3\left(x-\frac{20}{3}\right)^2-\frac{400}{3}+3y^2+100=0,$$

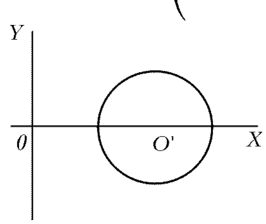


Рис. 80.

$$\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+y^2=\frac{100}{9}.$$

Таким образом, мы получили уравнение окружности с центром в точке $O'(20/3;\ 0)$ и радиусом $R=10/3$.

Задача 2. Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от точки $A(2;\ 0)$ и от прямой $5x+8=0$ относятся как $5:4$.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная (текущая) точка кривой. Согласно условию

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{5}{4} \qquad \text{или} \qquad 4\,d_1=5\,d_2.$$

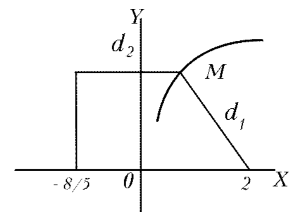


Рис. 81.

Расстояние между точками A и M
$d_1=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

Расстояние от точки M до прямой $\quad d_2=x+\dfrac{8}{5}$.

Тогда $\quad 4\sqrt{(x-2)^2+y^2}=5\left(x+\dfrac{8}{5}\right), \qquad 4\sqrt{(x-2)^2+y^2}=5x+8.$

Проведем необходимые преобразования

$16(x-2)^2+16y^2=25x^2+80x+64,$

$16(x^2-4x+4)+16y^2=25x^2+80x+64,$

$9x^2+144x-16y^2=0,$

$9(x^2+16x+8^2-8^2)-16y^2=0,$

$9(x+8)^2-9\cdot 64-16y^2=0,$

$9(x+8)^2-16y^2=9\cdot 64,$

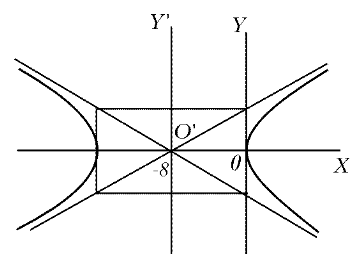


Рис. 82.

$$\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

Таким образом, мы получили уравнение гиперболы с центром в точке $O'(-8;\ 0)$ и полуосями: действительной $a=8$ и мнимой $b=6$.

3.2.3. Кривые в полярных координатах

Полярная система координат характеризуется точкой O на плоскости, называемой "полюсом", и лучом OP, выходящим из этой точки, называемым "полярной осью". Положение любой точки на плоскости в полярной системе координат задается двумя числами ρ и φ, т.е. $M(\rho;\varphi)$, где ρ - полярный радиус (расстояние от полюса до данной точки, и, как всякое расстояние $\rho > 0$). φ- полярный угол, который отсчитывается от полярной оси в радианах. Положительным направлением отсчета полярного угла считается отсчет против часовой стрелки. (Рис. 83).

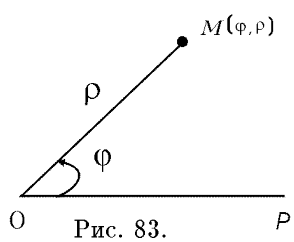


Рис. 83.

Уравнение линии в полярной системе координат записывается в виде уравнения, связывающего значения полярного угла с величиной полярного радиуса

$$\rho = \rho(\varphi).$$

График заданной в полярных координатах зависимости строится следующим образом:

– задаются через определенный шаг значения угла φ и на плоскости строятся лучи под выбранными углами, отсчитываемыми в положительном направлении от полярной оси (против часовой стрелки),

– по данной зависимости $\rho = \rho(\varphi)$ вычисляются соответствующие значения радиуса ρ,

– полученные значения ρ откладываются в выбранном масштабе по соответствующему лучу, начиная от полюса,

– полученные точки соединяются плавной кривой.

При построении кривой в полярных координатах следует учитывать такие свойства кривой, как четность, нечетность, периодичность и область определения функции $\rho = \rho(\varphi)$, что в значительной мере ускоряет процесс построения кривой, снижает объем вычислительной работы.

Задача Построить кривые, заданные полярными уравнениями.

- **1**. $\rho\ = a \cdot \varphi$, где a - положительное число.

Составим таблицу значений полярного радиуса ρ, подсчитанных для ряда значений полярного угла φ. Значения φ можно брать только положительные, чтобы не нарушить условие, что $\rho > 0$.

φ, рад.	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
ρ	0	$1.57a$	$3.14a$	$4.71a$	$6.28a$	$7.85a$	$9.42a$

Для построения кривой выбираем масштабную единицу для коэффициента a и на лучах, соответствующих заданным значениям φ, откладываем отрезки нужной длины. Полученная кривая называется **спиралью Архимеда**. (Рис. 84).

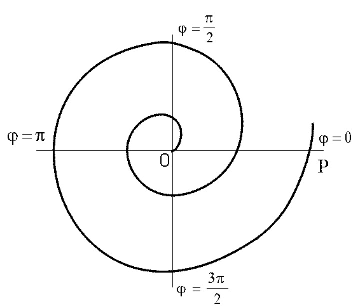


Рис. 84.

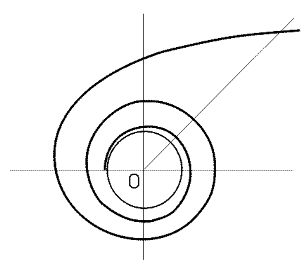


Рис. 85.

- **2**. $\rho = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

Составляем таблицу значений φ $(\varphi > 0)$ и ρ

φ, рад.	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	2π	3π	4π	5π
ρ	∞	2.27	1.64	1.32	1.16	1.11	1.08	1.06

Видно, что по мере увеличения угла φ соответствующие значения радиуса ρ уменьшаются и приближаются к значению $\rho = 1$, т. е. линия как бы накручивается на окружность единичного радиуса. (Рис. 85).

• **3**. $\rho = a(1-\cos\varphi), \quad a > 0.$

Используя четность и периодичность ($T = 2\pi$) функции $\cos\varphi$, строим кривую, подсчитав значения полярного радиуса для значений угла в интервале $[0;\pi]$, а затем достраиваем ее симметрично полученной для остальных значений угла в интервале $[\pi;2\pi]$. В таблице приведены значения полярного радиуса для значений φ с шагом $\pi/6$. Заметим, что данная кривая определена для любых значений φ, так как выражение $(1-\cos\varphi)$ всегда положительно.

φ, рад.	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
ρ	0	$1.13a$	$0.5a$	a	$1.5a$	$1.87a$	$2a$

Полученная кривая называется **кардиоидой**. (Рис.86).

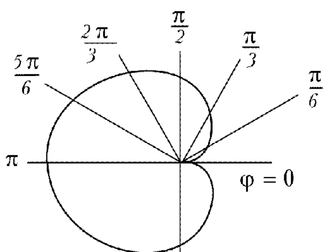


Рис. 86.

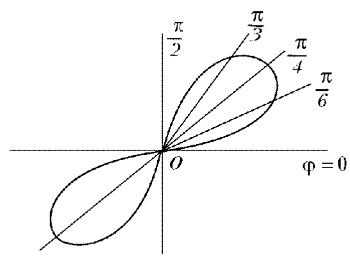


Рис. 87.

• **4**. $\rho = a\sin 2\varphi, \quad a > 0.$

Выясним характерные свойства зависимости $\rho = a\sin 2\varphi$:

a) так как период функции $\sin\varphi$ равен 2π, то период функции $\sin 2\varphi$ будет равен π или 180^o;

b) так как полярный радиус есть величина неотрицательная, то из условия $\sin\varphi \geq 0$ следует, что

$$0 \leq 2\varphi \leq \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

c) максимальное значение $\rho = a$ получится, если $\sin 2\varphi = 1$, то есть при $\varphi = \pi/4$.

Учитывая вышеизложенное, строим кривую по точкам, составив предварительно таблицу значений ρ и φ в интервале $[0;\pi/2]$, а затем через 180^o повторяем полученную линию.

φ, рад.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ρ	0	$0.87a$	a	$0.87a$	0

Эта кривая называется **двухлепестковой розой.** (Рис. 87).

• **5**. $\rho = 2\sin(\varphi - \dfrac{5\pi}{4})$.

Будем исходить из того, что уравнения вида

$$\rho = 2a\sin\varphi, \quad \rho = 2b\cos\varphi$$

при обычном совмещении полярной и декартовой систем координат представляют собой окружности,касающиеся осей координат $OX, y > 0$ и $OY, x > 0$ и радиусами a и b соответственно (см. табл. стр. 163). Следовательно, график данной функции есть также окружность радиусом 1 с центром на оси, повёрнутой относительно оси OY на угол $\dfrac{5\pi}{4} = 225^o$. (Рис. 88).

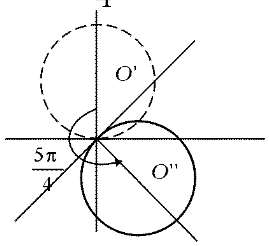


Рис. 88.

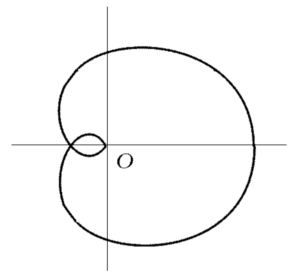


Рис. 89.

• **6**. $\rho = \cos^3(\frac{\varphi}{3})$.

Построим линию непосредственно по точкам.
Так как $\cos\alpha > 0$ для углов $-90^o < \alpha < 90^o$, то $\cos^3(\frac{\varphi}{3}) > 0$ для углов $-270^o < \varphi < 270^o$. Беря удобные для расчётов углы, занесём результаты в таблицу.

$\varphi,^o$	-270	-180	-90	0	90	180	270
$\varphi/3,^o$	-90	-60	-30	0	30	60	90
$\rho = \cos^3(\frac{\varphi}{3})$	0	0.125	0.64	1	0.64	0.125	0

Отрицательные значения углов откладываются от положительного направления оси OX по часовой стрелке, т.е. в отрицательном направлении. В силу четности функции $\cos\varphi$ значения ρ получаются одинаковыми для φ и $-\varphi$. (Рис. 89).

Иногда приходится осуществлять переход от декартовой прямоугольной системы координат к полярной или, наоборот, от полярной к декартовой. В этом случае необходимо знать формулы, связывающие декартовые и полярные координаты точки на плоскости.

Если поместить полюс полярной системы координат в начало декартовой, т.е. в точку $O(0;0)$, и направить полярную ось по оси

OX, то можно записать формулы

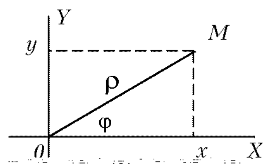


Рис. 90.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad (\star)$$

и наоборот

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (\star\star)$$

• **7**. $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$.

Непосредственное построение данной линии в прямоугольных координатах весьма затруднительно. Перейдем к полярным координатам согласно формулам $(\star)$

$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = 4(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$.

$\rho^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 = 4\rho^2\cdot\cos 2\varphi$.

Учтем, что $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, и, деля все выражение на ρ^2, получим

$$\rho^2 = 4\cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

При построении кривой учтем следующее:

a) область определения функции $\sqrt{\cos 2\varphi}$ находим из условия $\cos 2\varphi \geq 0$. Отсюда следует, что

$-\pi/2 \leq 2\varphi \leq \pi/2 \quad \Rightarrow \quad -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$,

b) период функции $\cos 2\varphi$ равен π, поэтому значения функции повторяются через 180^o.

В силу четности функции $\cos 2\varphi$ достаточно построить линию для значений угла $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, отобразить ее симметрично относительно оси OX вниз, а затем весь лепесток отобразить в левую полуплоскость.

c) Максимальное значение радиуса $\rho = 2$ получится при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

φ, рад.	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$
ρ	2	1.86	1.68	1.41	0

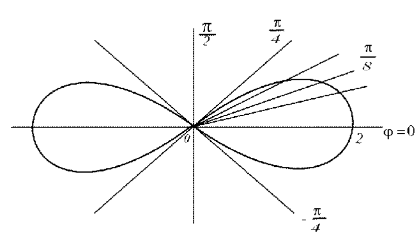


Рис. 91.

Полученная кривая называется **лемнискатой Бернулли.**

3.2.4. Построение кривых, заданных параметрически

Отметим, что универсальным способом задания линии на плоскости и в пространстве является параметрический способ, когда зависимость между координатами точки не задана непосредственно, а задана зависимостью координат от некоторого параметра t, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Известный нам уже пример параметрически заданной линии - это параметрические уравнения прямой на плоскости (построение такой прямой на плоскости мы уже рассматривали)

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0. \end{cases}$$

Существуют, в принципе, лишь *два способа* построения линий, заданных параметрическими уравнениями.

Первый из них, самый примитивный: задавать значения параметра t с каким-то шагом и для каждого значения t находить координаты x и y точек на плоскости (так мы, в принципе, поступали при построении прямой, заданной параметрически). Соединяя полученные точки плавной кривой, мы и получаем график функции.

Второй способ состоит в получении непосредственной зависимости между x и y, и он может быть реализован только в том случае, если удаётся из параметрических уравнений исключить параметр t.

Задача. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями.

• **1**. $\begin{cases} x = r\sin t, \\ y = r\cos t. \end{cases}$

Здесь легко исключить параметр t и связать x и y между собой непосредственно. Для этого достаточно возвести обе части этих уравнений в квадрат и сложить уравнения

$$\begin{cases} x^2 = r^2\sin^2 t, \\ y^2 = r^2\cos^2 t, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

(здесь мы учли, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Исходное уравнение определяет окружность с центром в начале координат и радиусом r. (Рис. 93).

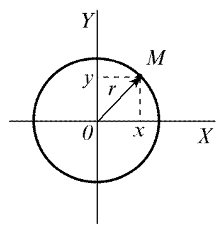


Рис. 93.

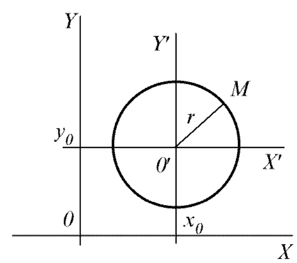


Рис. 94.

• **2**. $\begin{cases} x = x_0 + r\sin 2t, \\ y = y_0 + r\cos 2t. \end{cases}$

Здесь также легко исключить параметр t и связать x и y между собой непосредственно. Для этого сначала перенесем x_0 и y_0 в левые части уравнений, а затем действуем, как в предыдущем примере

$$\begin{cases} x - x_0 = r\sin 2t, \\ y - y_0 = r\cos 2t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Получили каноническое уравнение окружности с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и радиусом r. (Рис.94).

• **3**. $\begin{cases} x = a\sin t + b\cos t, \\ y = a\cos t - b\sin t. \end{cases}$

Исключим параметр t. Для этого возведем обе части этих уравнений в квадрат и сложим уравнения.

$$\begin{cases} x^2 = a^2\sin^2 t + 2ab\sin t\cos t + b^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\cos^2 t - 2ab\sin t\cos t + b^2\sin^2 t, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = a^2 + b^2\ ,$$

(так как при сложении удвоенные произведения уничтожатся, а коэффициентами при a^2 и b^2 будут $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$).

В итоге мы получили каноническое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Рис. 93).

• **4.** $\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \cos t. \end{cases}$

Здесь легко исключить параметр t и связать x и y между собой непосредственно. Для этого сначала разделим первое уравнение на a, второе – на b, затем возведем обе части этих уравнений в квадрат и сложим уравнения

$$\begin{cases} x/a = \sin t, \\ y/b = \cos t, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями a и b. (Рис.95).

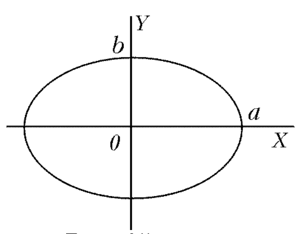


Рис. 95.

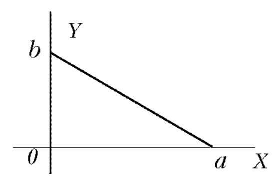


Рис. 96

• **5.** $\begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \cos^2 t. \end{cases}$

В этом примере действия по исключению параметра t ещё проще. Для этого достаточно разделить первое уравнение на a, второе – на b, и сложить уравнения. Получим уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

В силу того, что $0 \le \sin^2 t \le 1$ и $0 \le \cos^2 t \le 1$, то $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le b$, и геометрическим образом исходного уравнения будет только отрезок прямой, заключенный между точками пересечения ее с осями координат. (Рис.96).

• **6**. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = 2 - \sin 2t. \end{cases}$

Складывая уравнения, получим уравнение прямой

$$x + y = 2.$$

Но в силу того, что $|\sin 2t| \leq 1$, то $-1 \leq x \leq 1$ и $1 \leq y \leq 3$, и геометрическим образом исходного уравнения будет только отрезок прямой,заключенный между точками $A(-1;3)$ и $B(1;1)$. (Рис.97).

• **7**. $\begin{cases} x = 2, \\ y = \cos t. \end{cases}$

В силу того, что $|\cos t| \leq 1$, то $-1 \leq y \leq 1$, а $x = 2$. И мы получаем вертикальный отрезок. (Рис.98).

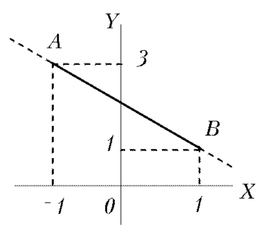


Рис. 97.

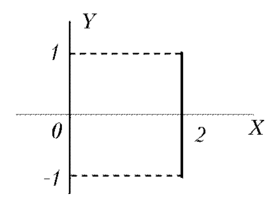


Рис. 98.

• **8**. $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 4\cos t. \end{cases}$

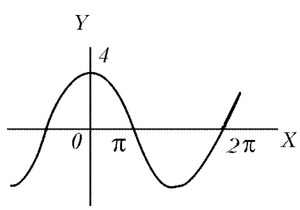


Рис. 99.

В этом примере легко исключить параметр t. Выражая t из первого уравнения $t = x/2$ и подставляя во второе, имеем зависимость $y = 4\cos(x/2)$, график которой показан на рисунке 99.

• **9**. $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t^2. \end{cases}$

Исключим параметр t следующим образом : из первого уравнения имеем $t = x - 1$. Подставим выражение для t во второе уравнение, получим

$$y = (x - 1)^2.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $O'(1;0)$, осью симметрии - OY и ветвями, направленными вверх. (Рис.100).

• **10**. $\begin{cases} x = 4\sin^2 t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Исключим параметр t следующим образом : из первого уравнения имеем $x = 4\sin^2 t = 4(1-\cos^2 t)$. Подставим выражение для $\cos t = y$ из второго уравнения, получим

$$x = 4(1-y^2) \qquad \Rightarrow \qquad x - 4 = -4y^2 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = -\tfrac{1}{4}\,(x-4)$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $O'(4;0)$, осью симметрии – OX и ветвями, направленными влево. Так как

$$|\cos t| \le 1, \quad 0 \le \sin^2 t \le 1, \quad \text{имеем}: \ -1 \le y \le 1, \ \text{ а } \ 0 \le x \le 4.$$

И мы получаем, что исходному параметрическому уравнению удовлетворяет только участок параболы, который выделен на рисунке 101.

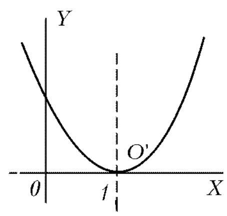


Рис. 100.

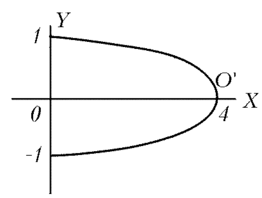


Рис. 101.

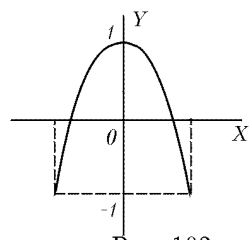


Рис. 102.

• **11**. $\begin{cases} x = \sin\frac{t}{2}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Исключим параметр t следующим образом: второе уравнение запишем в виде

$$y = \cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Подставим выражение для $\sin\dfrac{t}{2} = x$ из первого уравнения

$$y = 1 - 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y - 1 = -2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = -\tfrac{1}{2}\,(y-1).$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $O'(0;1)$, осью симметрии - OY и ветвями, направленными вниз.

В силу того, что $|\cos t| \le 1$, $|\sin(t/2)| \le 1$, имеем: $-1 \le y \le 1$, а $-1 \le x \le 1$. И мы получаем, что исходному параметрическому уравнению удовлетворяет только участок параболы, который выделен на рисунке (Рис. 102).

• **12**. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1 - \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Поскольку $\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} t}$, то после исключения параметра t получим уравнение $y = 1 - \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -\dfrac{1}{x}$. Это уравнение гиперболы $y = -1/x$, смещенной параллельно самой себе вверх на единицу.

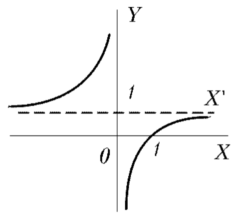


Рис. 103.

• **13**. $\begin{cases} x = (1 - t^3), \\ y = 2(1 + t^2). \end{cases}$

Построим график этой зависимости непосредственно, хотя и здесь можно было бы исключить параметр. Задаём ряд значений t и находим соответствующие значения x и y.

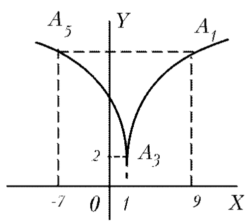


Рис. 104.

$$
\begin{array}{llll}
t = -2, & x = 9, & y = 10, & A_1(9;10). \\
t = -1, & x = 2, & y = 4, & A_2(2;4). \\
t = 0, & x = 1, & y = 2, & A_3(1;2). \\
t = 1, & x = 0, & y = 2, & A_4(0;2). \\
t = 2, & x = -7, & y = 10, & A_5(-7;10).
\end{array}
$$

• **14**. $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

Построим график этой зависимости непосредственно, отметив сразу следующие обстоятельства : из области определения логарифмической функции следует, что $\cos t > 0$ и $\sin t > 0$,
т.е. при построении кривой мы имеем право брать только значения $0 < t < \pi/2$. Кроме того, в силу того, что $|\cos t| \leq 1$, $|\sin t| \leq 1$, то получаемые значения x и y будут отрицательными, так как логарифм числа, меньшего единицы, есть отрицательное число. Таким образом, кривая должна лежать в 3-ей четверти. Далее задаём ряд значений t и находим соответствующие значения x и y.

$$
\begin{array}{lll}
t = \pi/6, & x \approx -0.16, & y \approx -0.7. \\
t = \pi/4, & x \approx -0.35, & y \approx -0.35. \\
t = \pi/3, & x \approx -0.7, & y \approx -0.16.
\end{array}
$$

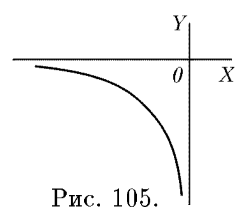
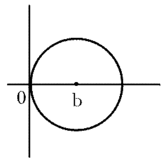


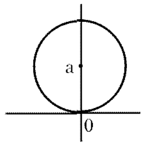
Рис. 105.

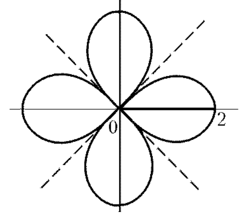
Кривые в полярной системе координат

ρ

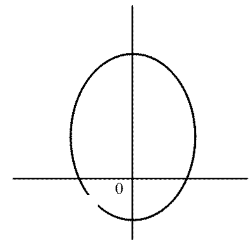


φ

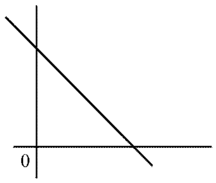


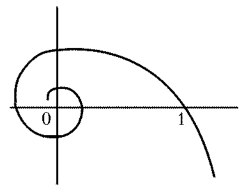


$$\rho = \frac{1}{2 - \sin\varphi}$$

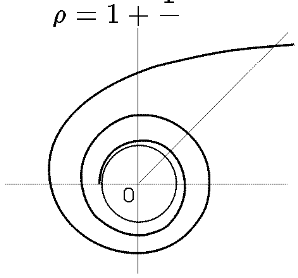


1

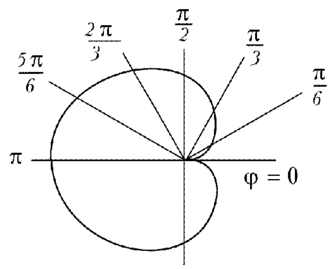




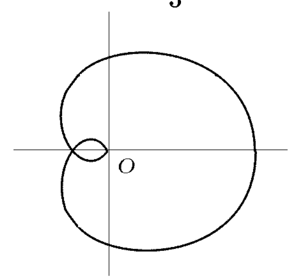
$\rho = 1 + \frac{1}{\;}$



$$\rho = 1 - \cos\varphi$$



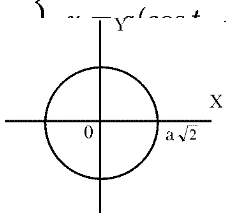
$$\rho = \cos\frac{\varphi}{3}$$



Кривые, заданные параметрически

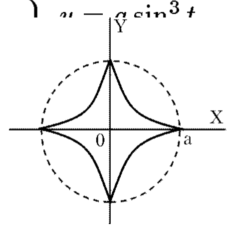
Окружность

$$\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \end{cases}$$



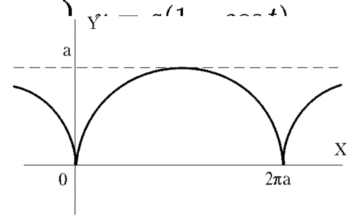
Астроида

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \end{cases}$$



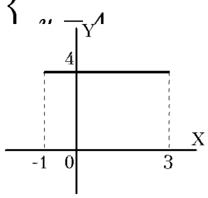
Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t + \sin t) \end{cases}$$

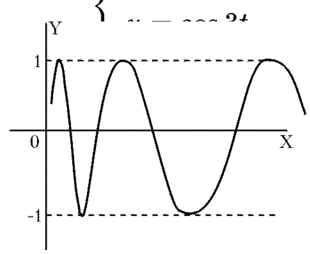


Отрезок прямой

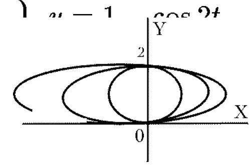
$$\begin{cases} x = 1 + 2\sin t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = e^{t/3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = t\sin 2t \end{cases}$$



Г л а в а 4.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскость

Всякую плоскость в прямоугольных координатах $OXYZ$ можно описать уравнением 1-ой степени (линейным) относительно трех переменных x, y и z, т.е. уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

Для получения уравнения плоскости используются средства векторной алгебры.

4.1.1. Основные уравнения плоскости

1. *Плоскость задана точкой* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и вектором нормали* $\vec{N} = \{A;\ B;\ C\}$, в качестве которого может быть взят любой вектор, перпендикулярный плоскости. (Рис.107.)

В этом случае для составления уравнения плоскости мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$, образуем вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\}$$

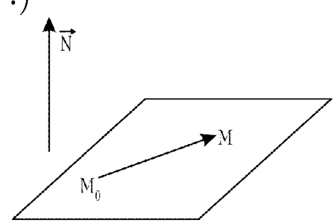


Рис. 107.

и записываем условие перпендикулярности векторов

$$\vec{N} = \{A;\ B;\ C\} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\},$$

используя их скалярное произведение $\left(\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right) = 0.$

Или в координатной форме

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Раскрыв скобки и обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим *общее уравнение* плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Таким образом, можно получить уравнение плоскости, зная координаты точки, через которую проходит плоскость, и какой-либо вектор, перпендикулярный плоскости. Рассмотрим простейшие примеры.

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5; -1;\ 7)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{2;\ 4;\ -3\}$.

Решение. Используем уравнение (2). Подставляем в него вместо коэффициентов A, B, C координаты вектора $\vec{N}$, а вместо $(x_0;\ y_0;\ z_0)$– координаты точки M_0.

$$2 \cdot (x-5) + 4 \cdot (y+1) - 3 \cdot (z-7) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + 4y - 3z + 15 = 0.$$

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку точку $M_0(1;2;-6)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{PQ}$, соединяющему точки $P(1;-5;2)$ и $Q(5;-7;-1)$.

Решение. Исходное уравнение (2).
Координаты точки, через которую проходит плоскость, известны. Найдем координаты вектора нормали $\vec{N} = \{A;B;C\}$, которым в данной задаче является вектор

$$\overrightarrow{PQ} = \{5-1; -7+5; -1-2\} = \{4;-2;-3\}.$$

Таким образом, уравнение плоскости

$$4(x-1) - 2(y-2) - 3(z+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2y - 3z - 18 = 0.$$

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;-6)$ перпендикулярно оси OX.

Решение. Исходное уравнение то же. Координаты точки, через которую проходит плоскость, известны. В качестве вектора нормали $\vec{N} = \{A;B;C\}$ в данном случае можно взять вектор $\vec{i} = \{1;0;0\}$ – орт оси OX. Таким образом, уравнение плоскости

$$1(x-1) + 0(y-2) + 0(z+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \qquad \text{или} \quad x = 1.$$

2. *Плоскость задана координатами трех точек, принадлежащих плоскости:* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$. (Рис.108.)

1-ый способ. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ и образуем 3 вектора, лежащие в этой плоскости:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{(x-x_1);(y-y_1);(z-z_1)\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2-x_1);(y_2-y_1);(z_2-z_1)\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{(x_3-x_1);(y_3-y_1);(z_3-z_1)\}.$$

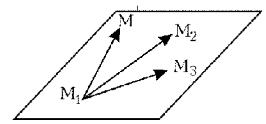


Рис. 108.

А теперь запишем условие компланарности 3-х векторов в векторной и координатной формах с помощью смешанного произведения

$$(\overrightarrow{M_1M},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}) = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Раскрывая этот определитель по элементам 1-ой строки, получим общее уравнение плоскости.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-2;2)$, $M_2(-3;1;2)$, $M_3(-1;2;1)$.

Решение. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ и образуем 3 вектора, лежащие в этой плоскости:

$\overrightarrow{M_1M} = \{(x-3);\ (y+2);\ (z-2)\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-6;\ 3;\ 0\}$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{-4;\ 4;\ -1\}$. А теперь запишем условие компланарности этих векторов в координатной форме с помощью смешанного произведения

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ -6 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем этот определитель по элементам 1-ой строки

$$(x-3)\cdot(-3) - (y+2)\cdot(6) + (z-2)\cdot(-12) = 0.$$

Разделим все выражение на (-3)

$$(x-3) + 2\,(y+2) + 4\,(z-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

2-ой способ составления уравнения плоскости, проходящей через 3 заданные точки. Этот способ не требует знания готовой формулы (3), а основан на использовании уравнения плоскости, проходящей через точку, перпендикулярно заданному вектору.

Как уже отмечалось, для составления уравнения плоскости

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

необходимо знать координаты одной точки (пусть это будет точка M_1) и вектор нормали плоскости. Для нахождения вектора нормали образуем в плоскости два известных вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$. (Рис.109.) Так как в качестве вектора нормали плоскости может быть взят любой вектор, перпендикулярный этой плоскости, то в нашем случае в качестве вектора нормали следует взять вектор, являющийся векторным произведением этих векторов, так как из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов есть вектор, перпендикулярный этим векторам.

$$\text{Итак,} \quad \vec{N}=[\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}].$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$.

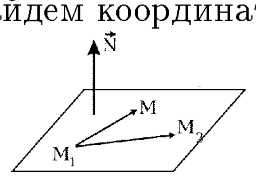


Рис. 109.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3-3;1+2;2-2\}=\{-6;3;0\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{-1-3;2+2;1-2\}=\{-4;4;-1\}.$$

Находим вектор нормали, записав векторное произведение в координатной форме

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot\vec{i}-6\cdot\vec{j}-12\cdot\vec{k}.$$

Итак, вектор нормали $\vec{N}=\{-3;-6;-12\}$. Подставляем координаты точки M_1 и вектора $\vec{N}$ в уравнение плоскости

$$-3(x-3)-6(y+2)-12(z-2)=0 \;\Rightarrow\; (x-3)+2(y+2)+4(z-2)=0 \Rightarrow$$

$$x+2y+4z-7=0.$$

4.1.2. Задачи на плоскость

1. Построение плоскостей

Отметим, что общее уравнение плоскости может быть полным или неполным, т.е. в нем могут отсутствовать одно или несколько слагаемых. Вид уравнения определяет ориентацию плоскости в пространстве.

Задача 5. Построить плоскости.

• **1**. $3x - 2y + z - 6 = 0$.

Плоскость удобно строить по трем точкам, а именно по точкам пересечения плоскости с осями координат:

Пусть $x = 0$, $y = 0$, тогда по уравнению плоскости получим $z = 6$. Получаем точку $M_1(0;0;6)$.

Аналогично : $x = 0$, $z = 0$ $\Rightarrow$ $y = -3$. Получаем точку $M_2(0;-3;0)$. Берем $y = 0$, $z = 0$, получаем $x = 2$ и точку $M_3(2;0;0)$. (Рис.110.)

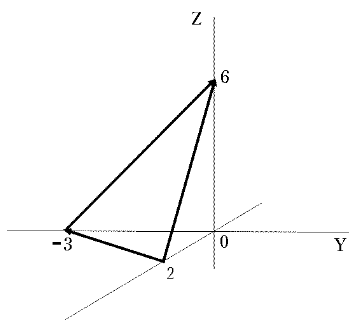


Рис. 110.

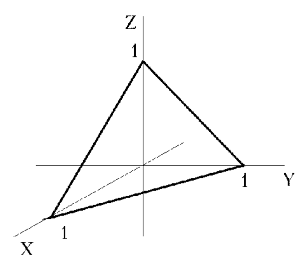


Рис. 111.

Находим точки пересечения плоскости с осями координат:
Пусть $x = 0$, $y = 0$, тогда по уравнению плоскости получим $z = 1$. Получаем точку $M_1(0;0;1)$.
Аналогично : при $x = 0$, $z = 0$ вычисляем $y = 1$. Получаем точку $M_2(0;1;0)$.
Берем $y = 0$, $z = 0$, получаем $x = 1$ и точку $M_3(1;0;0)$. (Рис.111.)

• **3**. $3x - 2y + z = 0.$

В уравнении отсутствует свободный член, значит плоскость проходит через начало координат.
Изобразить такую плоскость трудно, можно лишь построить часть плоскости (рис.112.), проведя в плоскостях координат "следы" плоскости, например:
$XOY: \Rightarrow \quad z = 0 \quad \Rightarrow \qquad 3x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x/2.$
$YOZ: \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \qquad -2y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2y.$

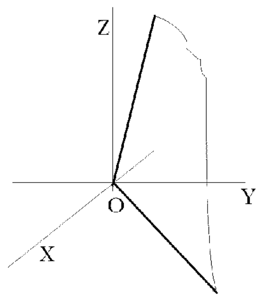


Рис. 112.

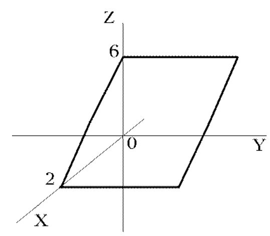


Рис. 113.

Если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость проходит параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

• **4**. $3x + z - 6 = 0.$

В уравнении данной плоскости отсутствует y, такая плоскость проходит параллельно оси OY, отсекая на осях координат отрезки

$a = 2$ (на оси OX, при $z = 0$) и $c = 6$ (на оси OZ, при $x = 0$). (Рис.113.)

• **5**. $2x - 5y = 12.$

В уравнении данной плоскости отсутствует z, такая плоскость проходит параллельно оси OZ, отсекая на осях координат отрезки

$a = 6$ (на оси OX, при $y = 0$) и

$b = -12/5 = -2.4$ (на оси OY, при $x = 0$). (Рис.114.)

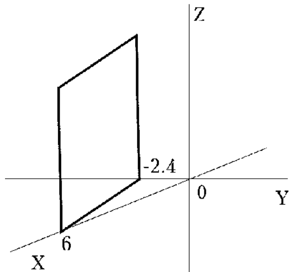


Рис. 114.

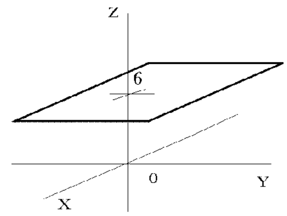


Рис. 115.

Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, то плоскость проходит параллельно соответствующей координатной плоскости.

• **6**. $z-6=0$.

В уравнении отсутствуют x и y, значит плоскость будет проходить параллельно координатной плоскости XOY через точку $z=6$ на оси OZ. (Рис.115.)

• **7**. $3x-6=0$.

Плоскость $3x-6=0$ проходит параллельно плоскости YOZ через точку $x=2$ на оси OX. (Рис.116.)

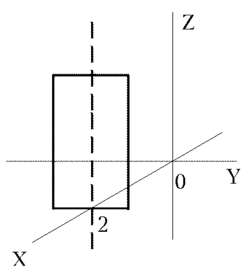


Рис. 116.

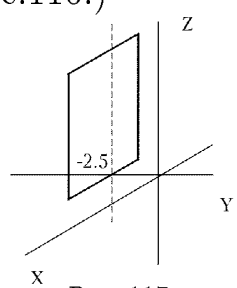


Рис. 117.

• **8**. $2y+5=0$.

Плоскость $2y+5=0$ проходит параллельно плоскости XOZ через точку $y=-5/2$ на оси OY. (Рис.117.)

Уравнения *координатных плоскостей* получаются, если в предыдущих случаях (п. 6-8) будет отсутствовать и свободный член:

$z=0$ – уравнение плоскости XOY,

$y=0$ – уравнение плоскости XOZ,

$x=0$ – уравнение плоскости YOZ.

2. Составление уравнений плоскостей

Задача 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-2;1)$, параллельно плоскости $2x-y-5z=0$.

Решение. Для составления уравнения плоскости мы имеем координаты точки $M(3;-2;1)$ и нужно найти вектор нормали. Очевидно, что для всех параллельных плоскостей можно взять один и тот же вектор нормали, поэтому из уравнения плоскости $2x-y-5z=0$ имеем $\vec{N}=\{2;-1;-5\}$ и записываем уравнение искомой плоскости

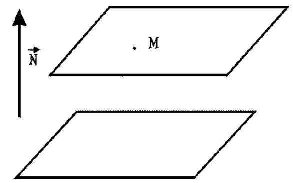


Рис. 118.

$$A(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

$$2(x-3)-1\cdot(y+2)-5(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-y-5z-3=0.$$

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-2;1)$, параллельно двум векторам $\vec{a}=\{5;3;-2\}$, $\vec{b}=\{-1;0;3\}$.

Решение. Для составления уравнения плоскости нам нужно найти координаты вектора нормали. Используем описанный выше способ. Так как плоскость параллельна двум неколлинеарным (в чем легко убедиться) векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то ее вектор нормали будет им перпендикулярен, а значит в качестве вектора нормали можно взять вектор, являющийся векторным произведением данных в условии векторов $\vec{N}=[\vec{a}\times\vec{b}]$. Находим координаты вектора $\vec{N}$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\cdot\vec{i}-13\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}.$$

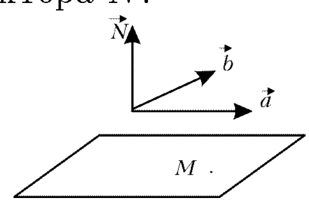


Рис. 119.

Итак, вектор нормали $\vec{N}=\{9;-13;\ 3\}$. Подставляем координаты точки M_1 и вектора $\vec{N}$ в уравнение плоскости

$$9(x-3)-13(y+2)+3(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 9x-13y+3z-56=0.$$

Задача 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(0;-1;4)$, $M_2(2;-5;1)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{0;-2;1\}$.

Решение. Для составления уравнения плоскости нам нужно иметь координаты точки (можно взять любую из данных в условии) и вектора нормали. Если ввести в рассмотрение вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-4;-3\}$, то нормальный вектор плоскости будет перпендикулярен двум векторам $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ и, как в предыдущей задаче, в качестве вектора нормали берем вектор, являющийся векторным произведением этих векторов

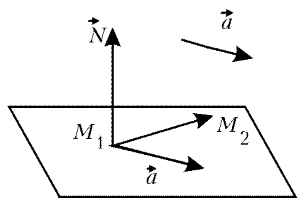


Рис. 120.

$$\vec{N}=[\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}]=$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -4 & -3\end{vmatrix}=$$
$$=10\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}.$$

Итак, вектор нормали $\vec{N}=\{10;\ 2;\ 4\}$. Подставляем координаты точки M_1 и вектора $\vec{N}$ в уравнение плоскости

$$10(x-0)+2(y+1)+4(z-4)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 10x+2y+4z-14=0.$$

Окончательно $\qquad 5x+y+2z-7=0.$

3. Взаимное расположение плоскостей

Плоскости могут быть параллельны, перпендикулярны или в общем случае пересекаться под каким-то углом. Отметим, что все эти задачи сводятся к задаче о взаимной ориентации векторов нормалей этих плоскостей и поэтому решаются средствами векторной алгебры. Во всех случаях по данным уравнениям плоскостей необходимо определить координаты их векторов нормалей.

Нахождение угла, образованного парой пересекающихся плоскостей

Пусть даны две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

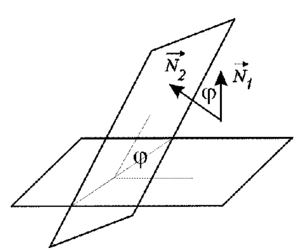


Рис. 121.

Углом между плоскостями называется двугранный угол, который измеряется вписанным в него линейным углом. Как ясно из рисунка, этот линейный угол равен углу между векторами нормалей этих плоскостей

$$\vec{N}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\} \qquad \text{и} \qquad \vec{N}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}.$$

Записываем известную формулу для косинуса угла между векторами

$$\cos\varphi = \cos(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{|\ \vec{N}_1\ ||\ \vec{N}_2\ |}.$$

$$cos\quad \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Задача 9. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$.

Решение. Векторы нормалей плоскостей имеют координаты

$$\vec{N}_1 = \{1; -2; 2\}, \qquad \vec{N}_2 = \{1; 0; 1\}.$$

Находим косинус угла между ними

$$\cos\quad \varphi = \cos(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{|\ \vec{N}_1\ ||\ \vec{N}_2\ |} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, острый угол между плоскостями равен 45^o.

Проверка условий параллельности и перпендикулярности плоскостей

Ясно, что вектора нормалей параллельных плоскостей коллинеарны $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$.

Записываем условие коллинеарности этих векторов в координатной форме

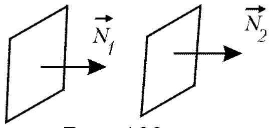


Рис. 122.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Вектора нормалей перпендикулярных плоскостей также взаимно перпендикулярны $\vec N_1 \perp \vec N_2$. Запишем условие перпендикулярности

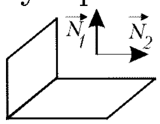


Рис. 123.

$$(\vec N_1\cdot\vec N_2)=0,$$

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Задача 10. При каких m и p плоскости $-2x+3y+mz-1=0$ и $px-6y+2z+3=0$ будут параллельны ?

Решение. Запишем условие коллинеарности нормальных векторов плоскостей в координатной форме

$$\frac{-2}{p}=\frac{3}{-6}=\frac{m}{2}.$$

Отсюда $-2/p=-1/2, \qquad p=4, \quad m/2=-1/2, \qquad m=-1.$

Задача 11. Доказать, что плоскости $2x+3y+2z-1=0$ и $5x-6y+4z-3=0$ перпендикулярны.

Решение. Векторы нормалей $\vec N_1=\{2;3;2\}, \quad \vec N_2=\{5;-6;4\}$. Проверяем условие перпендикулярности векторов

$$(\vec N_1\cdot\vec N_2)=0, \qquad 2\cdot5+3\cdot(-6)+2\cdot4=0, \qquad 0=0.$$

Вывод : вектор $\vec N_1\perp\vec N_2$, следовательно, перпендикулярны и плоскости.

4. Нахождение расстояния от точки до плоскости

Расстояние d от данной точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до данной плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|\ Ax_1+By_1+Cz_1+D\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Для определения расстояния от точки до плоскости необходимо в левую часть общего уравнения плоскости подставить координаты *данной точки, полученное число взять по абсолютной величине и разделить на длину нормального вектора плоскости.*

Задача 12. Найти объем куба, одна из вершин которого в точке $M_1(2;-3;5)$, а грань лежит на плоскости
$-x+2y-2z+16=0$.

Решение. Подстановкой координат точки в уравнение плоскости убеждаемся в том, что точка M_1 не принадлежит заданной плоскости, поэтому расстояние от этой точки до плоскости равно длине ребра куба

$$d=\frac{|\,(-1)\cdot 2+2\cdot(-3)-2\cdot 5+16\,|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}.$$

Объем куба $\quad V=d^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$ (куб. ед.)

Задача 13. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.

Решение. Расстояние между параллельными плоскостями есть длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости на другую. Схема решения:

Находим точку на первой плоскости: зануляем любые две координаты, например $y=0$, $z=0$, и из уравнения первой плоскости находим $x=2$. Итак, $M_1(2;0;0)$.

По известной формуле расстояния от точки до плоскости находим расстояние от этой точки до второй плоскости

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 0-5\cdot 0+12|}{\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{20}{\sqrt{50}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Уравнения плоскости

	Название	Уравнение. Смысл параметров
1.	Плоскость, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору	$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$ $M_o(x_o;y_o;z_o)$-точка на пл-ти $\vec{N}=\{A;B;C\}-$ вектор нормали
2.	Общее уравнение плоскости	Ax+By+Cz+D=0 $\vec{N}=\{A;B;C\}$
3.	Уравнение плоскости в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ a- отрезок на оси OX b-отрезок на оси OY c-отрезок на оси OZ

Взаимное расположение плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\qquad \vec{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}.$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\qquad \vec{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}.$$

Косинус угла

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{N}_1||\vec{N}_2,\quad \vec{N}_2=\alpha\vec{N}_1,\qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}$$

Условие перпендикулярности

$$\boxed{\vec{N}_1\perp\vec{N}_2,\quad (\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2)=0,\quad A_1\ A_2+B_1\ B_2+C_1C_2=0}$$

4.2. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана :

– точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{s} = \{m; n; p\}$, в качестве которого может служить любой параллельный данной прямой вектор;

– двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$;

– как линия пересечения двух плоскостей.

4.2.1. Основные уравнения прямой в пространстве

1. *Прямая задана точкой* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и направляющим вектором* $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\}$, *в качестве которого может быть взят любой вектор, параллельный прямой.*

В этом случае для составления уравнения прямой мы берем на ней произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$, образуем вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\}$ и записываем условие коллинеарности векторов $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{(x - x_0)\ ;\ (y - y_0);\ (z - z_0)\}$ в координатной форме

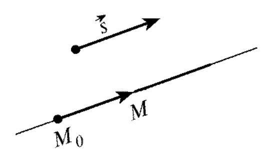


Рис. 124.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (1)$$

Таким образом, получили *канонические уравнения* прямой в пространстве.

Задача 14. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3; -1;\ 2)$ параллельно: a) оси OY, b) вектору $\vec{s} = \{5;\ 0;\ 4\}$.

Решение. Используем уравнения (1). В первом случае направляющим вектором будет вектор оси OY : $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, а во втором вектор $\vec{s}$

$$a)\ \ \frac{x - 3}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{0}, \qquad b)\ \ \frac{x - 3}{5} = \frac{y + 1}{0} = \frac{z - 2}{4}.$$

2. *Прямая задана двумя точками* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

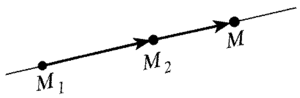


Рис. 125.

В этом случае для составления уравнений прямой можно использовать уже полученные канонические уравнения (1), взяв в качестве направляющего вектора прямой вектор $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1)\ ;\ (y_2 - y_1)\ ;\ (z_2 - z_1)\}$.

Тогда уравнения *прямой, проходящей через две заданные точки,* будут иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2)$$

Задача 15. Составить уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(0;1;-2)$ и $M_2(-3;4;\ -1)$.

Решение. Подставим в уравнения прямой, проходящей через две точки, координаты точек M_1 и M_2

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z+2}{-1+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

3. Отметим, что из канонических уравнений прямой (и уравнений прямой, проходящей через две заданные точки,) легко получаются *параметрические уравнения*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t, \\[2ex] \dfrac{y - y_0}{n} = t, \\[2ex] \dfrac{z - z_0}{p} = t. \end{cases}$$

Откуда окончательно

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt, \\ z - z_0 = pt, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases} \qquad (3)$$

4. *Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Эту систему называют *общими уравнениями* прямой в пространстве. Поскольку наиболее наглядными и удобными для использования при решении задач являются канонические и параметрические уравнения прямой, то возникает необходимость перехода от общих уравнений прямой к каноническим (параметрическим).

Задача 16. Привести общее уравнение прямой к каноническому виду

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases} \qquad (*).$$

Записать параметрические уравнения прямой.

Решение. Для составления уравнений прямой необходимо знать координаты точки, принадлежащей прямой, и координаты направляющего вектора. Решение задачи будет состоять из двух этапов.

а). *Нахождение точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей и имеет бесчисленное множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $(*)$. Система является неопределенной, так как в ней два уравнения, а неизвестных три. Одно из неизвестных можно задать произвольно. Пусть, например, $z = 0$.

Тогда система $(*)$ примет вид

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 4 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Складывая уравнения, получим $8x - 8 = 0$, т.е. $x = 1$. Значение y получим, подставив найденное значение x в $(**)$:
$2y = 4 - 3x$, $2y = 4 - 3, y = 1/2$. Итак, точка M_0 получена: $M_0(1; 1/2; 0)$.

b). *Нахождение направляющего вектора.*

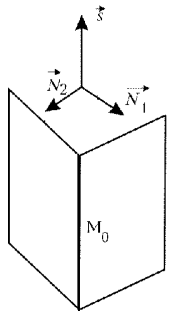


Рис. 126.

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{m; n; p\}$ перпендикулярен векторам нормалей обеих пересекающихся плоскостей $\vec{N}_1 = \{5; -2; 3\}$ и $\vec{N}_2 = \{3; 2; -5\}$. Поэтому в качестве направляющего вектора можно взять вектор, являющийся векторным произведением векторов нормалей плоскостей. Итак,

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \vec{i} + 34 \cdot \vec{j} + 16 \cdot \vec{k} = \{4; 34; 16\}.$$

Записываем канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x-1}{4} = \frac{y - 1/2}{34} = \frac{z}{16}.$$

Окончательно

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y - 1/2}{17} = \frac{z}{8}.$$

Для того, чтобы записать параметрические уравнения, приравняем каждое отношение к параметру t и получим систему параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 17t + 1/2, \\ z = 8t. \end{cases}$$

4.2.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут быть параллельны, перпендикулярны, или образовывать в общем случае какой-то угол. Отметим, что все эти задачи сводятся к задаче о взаимной ориентации направляющих векторов этих прямых и поэтому решаются средствами векторной алгебры. Во всех случаях по данным уравнениям прямых необходимо определить координаты их направляющих векторов.

1. Нахождение угла между прямыми

Пусть даны две прямые

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

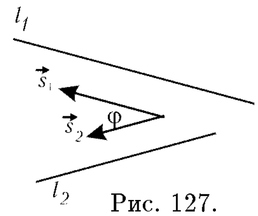


Рис. 127.

Углом между двумя прямыми называется угол между двумя лучами, выходящими из какой-либо точки пространства, параллельно данным прямым. Из рисунка ясно, что угол между прямыми есть угол между направляющими векторами этих прямых

$$\vec{s}_1=\{m_1;\ n_1;\ p_1\} \qquad \text{и} \qquad \vec{s}_2=\{m_2;\ n_2;\ p_2\}.$$

Записываем известную формулу для косинуса угла между векторами

$$\cos\ \varphi=\cos(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2)=\frac{(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)}{|\ \vec{s}_1\ ||\ \vec{s}_2\ |}.$$

$$cos\ \ \varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Задача 17. Найти косинус угла между прямыми

$$l_1\ :\ \begin{cases} x=2t-1,\\ y=-2,\\ z=3t+1\end{cases}, \qquad l_2\ :\ \begin{cases} x=t+3,\\ y=5t-1,\\ z=-4.\end{cases}$$

Решение. Прямые заданы параметрическими уравнениями, коэффициентами при t являются координаты направляющих векторов этих прямых

$$\vec{s}_1=\{2;\ 0;\ 3\} \qquad \text{и} \qquad \vec{s}_2=\{1;\ 5;\ 0\}.$$

Находим косинус угла между векторами

$$\cos\ \varphi=\cos(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2)=\frac{(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)}{|\ \vec{s}_1\ ||\ \vec{s}_2\ |}=$$

$$= \frac{2\cdot 1 + 0\cdot 5 + 3\cdot 0}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} \approx \ 0.56.$$

Задача 18. Найти косинус угла наклона прямой к оси OY

$$l: \quad \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 3x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Прямая задана общими уравнениями, то есть как линия пересечения двух плоскостей, векторы нормали которых

$$\vec{N}_1 = \{1; -2; 1\}, \qquad \vec{N}_2 = \{3; 1; 0\}.$$

Направляющий вектор находим как их векторное произведение

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{-1; 3; 7\}.$$

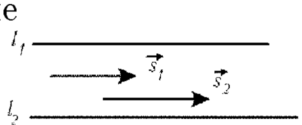
Косинус угла, который образует полученный вектор с осью OY, определяется как отношение второй координаты вектора к его длине

$$\cos\ \beta = \frac{3}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{3}{\sqrt{59}}.$$

2. Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

Ясно, что направляющие вектора параллельных прямых коллинеарны $\vec{s}_1 \,||\, \vec{s}_2$.

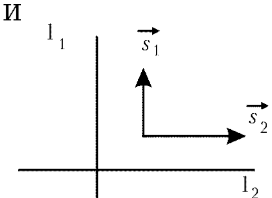
Записываем условие коллинеарности этих векторов в координатной форме



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Рис. 128.

Направляющие вектора перпендикулярных прямых также взаимно перпендикулярны $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$. Запишем условие перпендикулярности



$$(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0,$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Рис. 129.

Задача 19. Прямые

$$l_1 \ : \ \begin{cases} x = 4t - 3, \\ y = -t, \\ z = 5t + 2 \end{cases}, \qquad l_2 \ : \ \frac{x-2}{-8} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-10}$$

параллельны, так как их направляющие вектора

$$\vec{s}_1 = \{4; -1; 5\} \quad \text{и} \quad \vec{s}_2 = \{-8; 2; -10\} \quad \text{коллинеарны :}$$

$$\frac{4}{-8} = \frac{-1}{2} = \frac{5}{-10}.$$

Задача 20. Прямые

$$l_1 \ : \ \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-9}{-4} \quad \text{и} \quad l_2 \ : \ \frac{x-4}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{-1}$$

перпендикулярны, так как взаимно перпендикулярны их направляющие вектора $\vec{s}_1 = \{2; -5; -4\}$ и $\vec{s}_2 = \{3; 2; -1\}$. Действительно,

$$(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0, \qquad 2 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) = 0, \qquad 0 = 0.$$

Задача 21. Пересекаются ли прямые

$$l_1 \ : \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4} \quad \text{и} \quad l_2 \ : \ \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1} \quad ?$$

Укажем наиболее простой способ решения задачи.
Из уравнений прямых мы имеем координаты точек $M_1(1; 7; 5)$ и $M_2(6; -1; 0)$ и направляющих векторов $\vec{s}_1 = \{2; 1; 4\}$ и $\vec{s}_2 = \{3; -2; 1\}$.

Если ввести в рассмотрение вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{5; -8; -5\}$,
то понятно, что, если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости, и три вектора $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, и $\overrightarrow{M_1M_2}$ будут компланарны. Запишем условие компланарности $(\vec{s}_1, \ \vec{s}_2, \ \overrightarrow{M_1M_2}) = 0.$

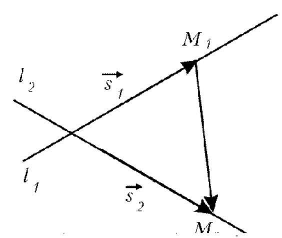


Рис. 130.

Или в координатной форме $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0.$

Вычисляя определитель, получим тождество $0 \equiv 0$. Таким образом, данные прямые в пространстве пересекаются.

3. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве

Задача 22. Найти расстояние от точки $M(-3;1;2)$ до прямой

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+6}{2}.$$

Решение. Расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. Воспользуемся следующей схемой решения.

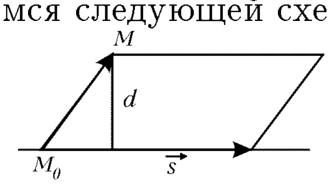


Рис. 131.

Образуем вектор $\overrightarrow{M_0M}$, соединяющий данную точку $M(-3;1;2)$ с точкой на прямой $M_0(-1;1;-6)$, получаем вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{-2;0;-8\}$.

Строим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}=\{1;-4;2\}$. Искомое расстояние является высотой этого параллелограмма и находится по известной формуле

$$d=\frac{S}{a},$$

S - площадь параллелограмма находится с помощью векторного произведения векторов-сторон,

a - длина основания параллелограмма, т.е. длина вектора $\vec{s}$.

$$S=|[\vec{s},\overrightarrow{M_0M}]|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 2\\ -2 & 0 & -8\end{matrix}\right\|=|32\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}|=$$

$$=\sqrt{32^2+4^2+(-8)^2}=4\sqrt{69}.$$

$$a=|\vec{s}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21}.$$

Искомое расстояние $\quad d=\dfrac{S}{a}=\dfrac{|\,[\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M}]\,|}{|\vec{a}|}=\dfrac{4\sqrt{69}}{\sqrt{21}}\approx 7.25.$

Замечание. Аналогичным образом решается задача о нахождении расстояния между двумя параллельными прямыми в пространстве.

Из уравнения одной прямой берутся координаты точки и далее находится расстояние от этой точки до второй прямой, как показано выше.

4.2.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

В задачах на взаимное расположение прямой с плоскостью в пространстве привлекаются направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости.

1. Нахождение угла между прямой и плоскостью

Пусть требуется найти угол между прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad \text{и плоскостью} \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Углом между прямой и плоскостью в пространстве называется угол между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Из рисунка видно, что угол между прямой и плоскостью φ дополняет угол α между направляющим вектором прямой $\vec{s}=\{m;n;p\}$ и вектором нормали плоскости $\vec{N}=\{A;B;C\}$ до 90^o.

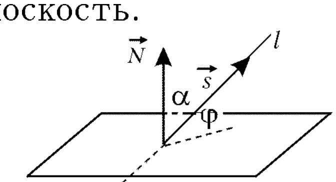


Рис. 132.

Средствами векторной алгебры находим угол α:

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{N}\cdot\vec{s})}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}.$$

Но $\cos\alpha=\cos(90^o-\varphi)=\sin\varphi$, поэтому можно записать формулу для нахождения синуса угла между прямой и плоскостью в векторной и координатной форме

$$\sin\varphi=\frac{|(\vec{N}\cdot\vec{s})|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Так как угол φ принимает значения от 0^o до 180^o, а синус таких углов величина положительная, то в числителе формулы поставлен знак модуля.

Задача 23. Найти угол между прямой

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-6} \quad \text{и плоскостью} \quad x-2y+2z-5=0.$$

Решение. Из условий задачи имеем : вектор нормали плоскости $\vec{N}=\{1;-2;2\}$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}=\{2;3;-6\}$. Записываем формулу для нахождения синуса угла между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 2+(-2)\cdot 3+2\cdot(-6)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{9}\sqrt{49}}=\frac{16}{21}.$$

2. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве

Из рисунка видно, что, если прямая и плоскость параллельны, то их характеристические вектора $\vec{N}=\{A;B;C\}$ и $\vec{s}=\{m;n;p\}$ взаимно перпендикулярны

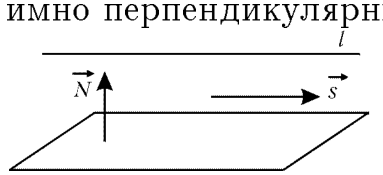


Рис. 133.

$$\vec{N}\perp\vec{s} \quad\Rightarrow\quad (\vec{N}\cdot\vec{s})=0,$$

$$Am+Bn+Cp=0.$$

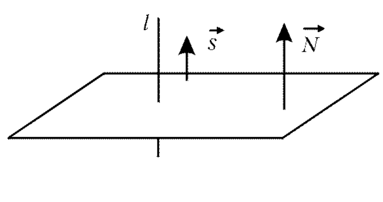


Рис. 134.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то вектора $\vec{N}=\{A;B;C\}$ и $\vec{s}=\{m;n;p\}$ будут коллинеарны

$$\vec{N}\ ||\ \vec{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

3. Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью

Задача 24. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1} \quad \text{с плоскостью} \quad 3x+5y+z-21=0.$$

Решение. Для того, чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью достаточно найти решение системы, включающей в себя уравнения прямой и плоскости $\begin{cases}\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-2}{1},\\ 3x+5y+z-21=0.\end{cases}$

Для решения системы канонические уравнения прямой удобнее представить параметрически. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 5t, \\ z = t + 2, \\ 3x + 5y + z - 21 = 0. \end{cases}$$

Подставляем значения $x; y; z$ из первых уравнений в уравнение плоскости и решаем его относительно параметра t.

$$3(3t-2) + 5(5t) + 1\cdot(t+2) - 21 = 0, \quad \text{откуда} \quad 35t = 25,$$

т.е. значение параметра t, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости, равно $t = \dfrac{25}{35} = \dfrac{5}{7}$.

Подставим это значение в первые три уравнения системы и получим координаты точки пересечения

$$\begin{cases} x = 3\cdot\dfrac{5}{7} - 2 = \dfrac{1}{7}, \\ y = 5\cdot\dfrac{5}{7} = \dfrac{25}{7}, \\ z = \dfrac{5}{7} + 2 = \dfrac{19}{7}. \end{cases} \qquad M'\left(\frac{1}{7}; \frac{25}{7}; \frac{19}{7}\right).$$

4.2.4. Смешанные задачи на прямую и плоскость в пространстве

Задача 25. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;2;-6)$ перпендикулярно плоскости $5x - 4y + 3z - 1 = 0$.

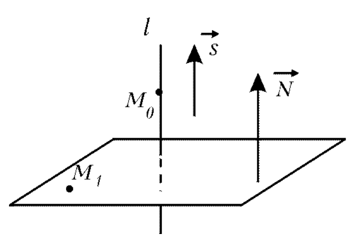


Рис. 135.

Решение. Уравнения прямой берем в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Координаты точки, через которую проходит прямая, известны. В качестве направляющего вектора $\vec{s} = \{m; n; p\}$, может служить вектор нормали данной плоскости $\vec{s} = \{m; n; p\} = = \vec{N} = \{A; B; C\} = \{5; -4; 3\}$.

Таким образом, уравнения прямой примут вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+6}{3}$$

Задача 26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(5;2;-6)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-3}.$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку, перпендикулярно вектору имеет вид

$$A\,(x-x_0) + B\,(y-y_0) + C\,(z-z_0) = 0.$$

Координаты точки, через которую проходит плоскость, известны. Как видно из рисунка 135, вектором нормали плоскости $\vec{N} = \{A;B;C\}$, может служить направляющий вектор данной прямой $\vec{N} = \vec{s} = \{-1;4;-3\}$. Таким образом, уравнение плоскости

$$-1\,(x-5) + 4\,(y-2) - 3\,(z+6) = 0, \qquad -x + 4y - 3z - 21 = 0,$$

$$x - 4y + 3z + 21 = 0.$$

Задача 27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;2;5)$ и прямую

$$\begin{cases} x = -2t - 5, \\ y = 4t + 3, \\ z = t + 2. \end{cases}$$

Найти объем треугольной пирамиды, которую плоскость отсекает от координатного октанта.

Решение. Из уравнений прямой мы можем извлечь следующую информацию:
точка на прямой $M_1(-5;3;2)$, направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{-2;4;1\}$. Если ввести в рассмотрение вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{-2;1;-3\}$, то вместе с направляющим вектором прямой $\vec{s} = \{-2;4;1\}$ мы будем иметь два вектора, лежащие в искомой плоскости.

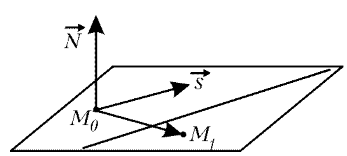


Рис. 136.

Тогда вектор нормали к плоскости можно найти как их векторное произведение

$$\vec{N} = \{A;B;C\} = [\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{-13;-8;6\}.$$

Уравнение искомой плоскости будет

$$-13(x+3) - 8(y-2) + 6(z-5) = 0 \quad \text{или} \quad 13x + 8y - 6z + 53 = 0.$$

Длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, будут соответственно равны

$$a = \frac{53}{13}; \quad b = \frac{53}{8}; \quad c = \frac{53}{6}.$$

Следовательно объём пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла, будет равен $V = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{53}{13}\cdot\dfrac{53}{8}\cdot\dfrac{53}{6} \approx 39.7.$

Задача 28. Найти проекцию точки $A(4;2;-1)$ на прямую

$$x = 3t-2, \quad y = 5t, \quad z = t+2.$$

Решение. Проекцией точки на прямую служит основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. Будем решать задачу аналитически согласно этому геометрическому представлению. Однако, составить в пространстве уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно данной прямой, да ещё и пересекающей данную, задача сложная, поэтому мы поступим проще.

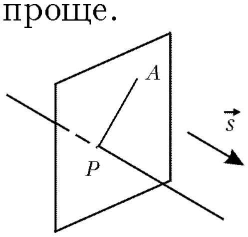


Рис. 137.

Исходная прямая проходит через точку $M_0(-2;0;2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s} = \{3;5;1\}$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно данной прямой. При этом направляющий вектор прямой будет служить нормальным вектором плоскости.

Подставляя в уравнение вида $A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$ координаты точки $A(4;2;-1)$ и координаты нормального вектора $\vec{N} = \{A;B;C\} = \{3;5;1\}$, получаем уравнение плоскости

$$3(x-4) + 5(y-2) + (z+1) = 0 \quad \text{или} \quad 3x + 5y + z - 21 = 0.$$

Найдём теперь проекцию данной точки на данную прямую как точку пересечения данной прямой с найденной плоскостью. Для этого достаточно найти решение системы, включающей в себя уравнения прямой и плоскости.

$$\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 5t, \\ z = t + 2, \\ 3x + 5y + z - 21 = 0. \end{cases}$$

Эта задача нами уже решена (см. задачу 24), берем оттуда результат. Таким образом, проекцией точки A на данную прямую будет точка P с координатами

$$P\left(\frac{1}{7}; \frac{25}{7}; \frac{19}{7}\right).$$

Задача 29. Найти проекцию точки $A(4;-3;1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$.

Решение. Проекцией точки на плоскость служит основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно плоскости. Направляющим вектором прямой будет вектор нормали плоскости $\vec{s} = \vec{N} = \{1; 2; -1\}$.

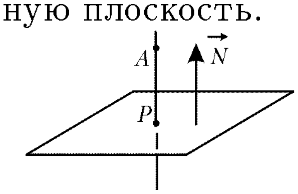


Рис. 138.

Подставляем в канонические уравнения прямой координаты точки и направляющего вектора

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Найдём теперь точку пересечения прямой и плоскости, которая и будет являться проекцией данной точки на плоскость. Решаем систему

$$\begin{cases} x = t + 4, \\ y = 2t - 3, \\ z = -t + 1, \\ x + 2y - z - 3 = 0. \end{cases} \implies \quad t = 1 \quad \implies \quad P(5; -1; 0).$$

Задача 30. Найти точку, симметричную точке $A(4;-3;1)$, относительно плоскости $x+2y-z-3=0$.

Решение. Под симметричной точкой понимется точка, являющаяся зеркальным отображением данной точки относительно плоскости. Эта точка лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, и находится от плоскости на таком же расстоянии, что и данная точка.

Отметим основные этапы решения задачи:

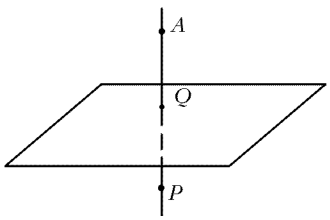


Рис. 139.

а) Находим проекцию точки $A(4;3;-1)$ на плоскость, получаем точку $Q(5;-1;0)$. Эта точка является серединой отрезка, соединяющего искомую точку P и данную точку A.

б) Координаты середины отрезка находятся по формулам

$$x_Q = \frac{x_A + x_P}{2}, \qquad y_Q = \frac{y_A + y_P}{2}, \qquad z_Q = \frac{z_A + z_P}{2}.$$

Подставляя в эти равенства координаты точек A и Q, найдем координаты точки P.

Координаты точки $Q(5;-1;0)$ -проекции данной точки на плоскость мы определили в предыдущей задаче.

Записываем соотношения для определения координат симметричной точки

$$5 = \frac{4 + x_P}{2}, \qquad -1 = \frac{-3 + y_P}{2}, \qquad 0 = \frac{1 + z_P}{2}.$$

Отсюда получаем $x_p = 6, \quad y_p = 1, \quad z_p = -1 \quad \Rightarrow \quad P(6;1;-1).$

Задача 31. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$l_1 \ : \quad \frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}, \qquad l_2 \ : \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}.$$

Решение. Для составления уравнения плоскости

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0$$

необходимо знать координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и координаты нормального вектора $\vec{N} = \{A;B;C\}$.

Из уравнений прямых имеем координаты точек и направляющего вектора: $M_1(0;-2;1)$, $M_2(1;3;-2)$, $\vec{s}=\{7;3;5\}$.
Для составления уравнения плоскости можно использовать любую из двух этих точек, например, точку M_1.

Образуем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1;5;-3\}$. Для получения вектор нормали плоскости нужно знать два неколлинеарных вектора (параллельных данной плоскости). Такими векторами являются вектора $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$.

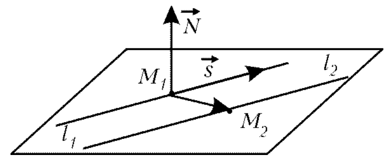


Рис. 140.

В качестве вектора нормали берем вектор, перпендикулярный этим векторам, т.е. вектор, являющийся их векторным произведением.

$$\vec{N}=[\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & -3\\ 7 & 3 & 5\end{vmatrix}=34\cdot\vec{i}-26\cdot\vec{j}-32\cdot\vec{k}=\{34;-26;-32\}.$$

Уравнение плоскости

$$34(x-0)-26(y+2)-32(z-1)=0, \qquad 17x-13y-16z-10=0.$$

Задача 32. Найти проекцию прямой

$$\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2} \quad \text{на плоскость} \quad x-y+3z+8=0.$$

Решение. Проекцией прямой на плоскость называется линия пересечения l_1 данной плоскости с плоскостью, проходящей через эту прямую перпендикулярно к заданной.(Рис.142.)

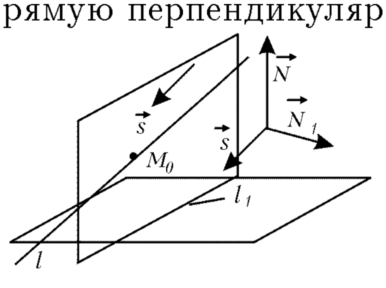


Рис. 142.

Итак, составляем уравнение плоскости, проходящей через точку прямой $M_0(0;4;-1)$ и с нормальным вектором $\vec{N}_1$, который перпендикулярен двум известным векторам $\vec{s}=\{4;3;-2\}$ и $\vec{N}=\{1;-1;3\}$. Поэтому

$$\vec{N}_1=[\vec{s}\times\vec{N}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=7\cdot\vec{i}-14\cdot\vec{j}-7\cdot\vec{k}=\{7;-14;-7\}.$$

Так как длина вектора $\vec{N}_1$ несущественна, то возьмем вектор $\vec{N}_1 = \{1; -2; -1\}$ в 7 раз короче полученного.
Записываем уравнение плоскости

$$1(x-0) - 2(y-4) - (z+1) = 0\ , \qquad x - 2y - z + 7 = 0.$$

Проекцией, как было отмечено, является линия пересечения полученной плоскости с данной. Записав систему

$$\begin{cases} x - 2y - z + 7 = 0, \\ x - y + 3z + 8 = 0, \end{cases}$$

получим общие уравнения прямой в пространстве. По сути дела, задача решена. Но можно получить и канонические или параметрические уравнения прямой. Выше был изложен один из способов приведения общих уравнений прямой к каноническому виду.

Задача 33. Найти кратчайшее расстояние между непересекающимися (скрещивающимися) прямыми

$$l_1 \ : \ \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1},$$
$$l_2 \ : \ \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

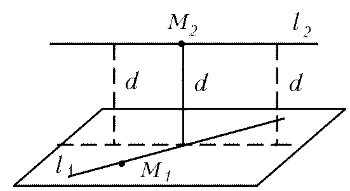


Рис. 145

Решение. Расстоянием между непересекающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра к этим прямым. Но задача составления общего перпендикуляра к двум прямым довольно сложная, поэтому поступим следующим образом:

а) Составим уравнение плоскости, проходящей через одну прямую (например, l_1) параллельно второй. (Уравнение этой плоскости получено при решении предыдущего примера: $3x + 2y - 6z - 23 = 0$). При этом все точки прямой l_2 окажутся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

б) Найдем расстояние от любой точки второй прямой (из уравнения нам известны координаты точки $M_2(0; -7; 2)$) до полученной плоскости по формуле расстояния от точки до плоскости

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot (-7) - 6 \cdot 2 - 23|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{49}{7} = 7.$$

Уравнения прямой в пространстве

	Название	Уравнение Смысл параметров
1.	Канонические ур-я прямой в пространстве	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_o}{p}$ $M_0(x_o;y_o;z_o)$—точка на прямой $\vec{s}=\{m;n;p\}$—направляющий вектор
2.	Параметрические ур-я прямой в пространстве	$\begin{cases} x=mt+x_o \\ y=nt+y_o \\ z=pt+z_o \end{cases}$, тот же
3.	Уравнения прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ Точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$
4.	Общие уравнения прямой в пространстве	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{x-x_2}{p_2}$$

$$\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}, \qquad \vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$$

Косинус угла

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{s}_1||\vec{s}_2, \quad \vec{s}_2=\alpha\vec{s}_1, \qquad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}}$$

Условие перпендикулярности

$$\boxed{\vec{s}_1\perp\vec{s}_2, \quad (\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2)=0, \quad m_1\ m_2+n_1\ n_2+p_1p_2=0}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad \vec{s}=\{m;n;p\}$$

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \vec{N}_1=\{A;B;C\}$$

Синус угла

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|(\vec{N}\cdot\vec{s})|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|\,Am+Bn+Cp\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{s}\perp\vec{N}, \qquad (\vec{N}\cdot\vec{s})=0, \qquad A\,m+B\,n+C\,p=0}$$

Условие перпендикулярности

$$\boxed{\vec{s}\parallel\vec{N}, \qquad \vec{N}=\alpha\,\vec{s}, \qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}}$$

Точка пересечения $\begin{cases} x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\\ A\,x+B\,y+C\,z+D=0\end{cases}$

Условие принадлежности прямой плоскости

$$M_0\in P, \quad \vec{s}\perp\vec{N}, \quad \begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\\ A\,m+B\,n+C\,p=0\end{cases}$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$d=\frac{|\,[\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}]\,|}{|\,\vec{s}\,|}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$d=\frac{|\,(\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{s}_1,\ \vec{s}_2)\,|}{|\,[\vec{s}_1\times\vec{s}_2]\,|}$$

Условие пересечения двух прямых в пространстве

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0.$$

4.3. Поверхности второго порядка

Поверхность 2-го порядка в прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением 2-ой степени относительно трех переменных $x,\ y,\ z.$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

Задача приведения общего уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду решается аналогично задаче приведения общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду и состоит в поворотах и параллельном переносе системы координат в новое начало в пространстве. Однако, эта задача, в отличие от задачи для кривых на плоскости, гораздо более громоздкая. Остановимся на рассмотрении только таких уравнений, в которых отсутствуют произведения $xz,\ xy,\ yz,$ т.е. уравнения вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Преобразование таких уравнений не требует поворотов системы координат и содержит лишь параллельный перенос системы координат в новое начало.

Наиболее простым (каноническим) уравнением описывается поверхность, привязанная к осям симметрии поверхности. Свое название поверхность получает, как правило, по названию кривых 2-го порядка, получающихся при пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскостям координат $x = const,$
$y = const,\quad z = const.$

Различают 5 основных типов поверхностей 2-го порядка. Графики поверхностей, их канонические уравнения и названия приведены в таблице.

Остановимся кратко на характеристике типов поверхностей, на распознавании типа поверхности по ее уравнению и построении поверхности по характерным параметрам.

4.3.1. Эллипсоиды.

Эллипсоид – это поверхность, в любом сечении которой плоскостями, параллельными координатным, получаются эллипсы. Каноническое уравнение эллипсоида с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(x_0;y_0;z_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

Уравнение эллипсоида имеет

a) *квадраты всех трех переменных;*

b) *знаки при квадратах переменных одинаковые;*

c) *коэффициенты при квадратах переменных разные.*

Для построения эллипсоида необходимо знать:

1) координаты центра (если центр смещен от начала координат, то в уравнении будут присутствовать члены с первыми степенями переменных, в этих случаях действия по приведению уравнения к виду, удобному для построения, аналогичны тем, что проводились для кривых 2-го порядка),

2) размеры полуосей: a – откладывается по оси OX, b – откладывается по оси OY, c – откладывается по оси OZ.

Далее строим три основных эллипса, которые получаются в сечениях эллипсоида плоскостями координат.

4.3.2. Сфера

Частным случаем эллипсоида является сфера:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Уравнение *сферы* отличается от уравнения эллипсоида тем, что *коэффициенты при квадратах переменных одинаковые.*

Уравнение сферы с центром в точке $O'(x_0;y_0;z_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Для построения сферы необходимо знать координаты центра и радиус. В плоскостях координат строим три сечения сферы, которые будут окружностями с радиусами, равными радиусу сферы.

4.3.3. Гиперболоиды

Канонические уравнения *гиперболоидов*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

имеют следующие признаки:

a) присутствуют квадраты всех трех переменных;

b) знаки при квадратах разные;

c) коэффициенты при квадратах переменных могут быть как различными, так и одинаковыми.

Гиперболоиды - это поверхности, в двух сечениях которых плоскостями, параллельными координатным, получаются гиперболы, а в третьем - либо эллипс, либо окружность. Различают два вида гиперболоидов.

1. Однополостный гиперболоид определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В сечении однополостного гиперболоида плоскостями $y=0$ и $x=0$ получаются гиперболы, а в сечении плоскостью $z=0-$ эллипс.

Для построения данного однополостного гиперболоида необходимо :

1) знать координаты центра,

2) ось симметрии (определяется по переменной, перед квадратом которой в каноническом уравнении знак минус),

3) построить так называемый горловой эллипс с полуосями a и b, который получается в сечении гиперболоида плоскостью $z=0$,

4) построить гиперболы в плоскостях XOZ и YOZ.

Если в исходном уравнении знак минус стоит перед квадратом другой переменной, например, перед y^2, то горловой эллипс получится в сечении гиперболоида плоскостью $y=0$, и гиперболоид будет иметь ось симметрии OY. Если в исходном уравнении знак минус стоит перед x^2, то будет иметь ось симметрии OX. Соответствующие уравнения будут иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Эта поверхность состоит из двух полостей, в вертикальных сечениях которых плоскостями XOZ и YOZ – гиперболы, а в горизонтальных $z=const>\pm c$ – эллипсы. Если взять значения $|z|<c$, то в сечениях будут получаться мнимые эллипсы, например, при $z=0$ получим "мнимый" эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Ось симметрии гиперболоида определяется по той переменной, перед квадратом которой в левой части канонического уравнения стоит знак минус.

Уравнения двухполостных гиперболоидов с осями симметрии OY и OX можно записать по аналогии с соответствующими уравнениями однополостных гиперболоидов:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Заметим, что в уравнении однополостного гиперболоида в правой части должна стоять $+1$, *а в левой части должен быть один знак "минус" перед квадратом какой-либо переменной;*

в уравнении двухполостного гиперболоида в правой части должна стоять -1, *а в левой части должен быть один знак "минус" перед квадратом какой-либо переменной.*

4.3.4. Конусы

Коническая поверхность определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

От уравнений гиперболоидов оно отличается тем, что в нем отсутствует свободный член (вместо единицы в правой части уравнения стоит ноль).

Сечения данного конуса горизонтальными плоскостями $z = const$ представляют собой эллипсы (в случае a=b – окружности). Сечения конуса координатными плоскостями XOZ и YOZ дают по паре пересекающихся прямых (образующих конуса), проходящих через начало координат (вершину конуса). Как и во всех предыдущих случаях возможно смещение вершины конуса в точку $O'(x_0; y_0; z_0)$. Ось симметрии данного конуса – OZ (определяется так же, как и у гиперболоидов, по переменной, перед которой в левой части канонического уравнения стоит знак "минус").

Конус с осью симметрии OY : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

Конус с осью симметрии OX : $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

Заметим,что в левой части канонического уравнения конуса должен быть один знак "минус".

4.3.5. Параболоиды

1 Эллиптический параболоид имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z.$$

Легко увидеть, что *в уравнении параболоида присутствуют все три переменные,* но отличительным *признаком* уравнения параболоида является *отсутствие квадрата одной переменной.*

В сечениях данного параболоида плоскостями, параллельными координатным XOZ и YOZ, будут параболы с осью симметрии OZ и ветвями, направлеными вверх или вниз, в зависимости от знака перед z. В сечениях плоскостями $z = const$ получаются эллипсы (либо окружности, если $a = b$).

Для построения эллиптического параболоида необходимо знать:

a) координаты вершины,

b) ось симметрии (параллельна той оси, координата которой входит в уравнение только в первой степени),

c) направление ветвей.

Параболоид с осью симметрии OY :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm y.$$

Параболоид с осью симметрии OX :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm x.$$

Можно также записать уравнения параболоидов с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm(z - z_0).$$

Например, уравнение кругового параболоида с вершиной в точке $O'(0; 0; -2)$ и осью симметрии OZ будет иметь вид

$$x^2 + y^2 = \pm(z + 2).$$

2. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид - это поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Эта сложная поверхность имеет форму седла. В таблице изображена поверхность, которая соответствует приведенному уравнению. При построении поверхности с уравнениями, например вида

$$2x^2 - z^2 = y,$$

или

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 5x,$$

необходимо повернуть параболоид соответствующим образом.

Отметим, что уравнения эллиптического и гиперболического параболоидов отличаются тем, что в левой части уравнения эллиптического параболоида стоит сумма квадратов переменных, а в левой части уравнения гиперболического параболоида – разность квадратов.

4.3.6. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической называется поверхность, которую описывает прямая (называемая *образующей*), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой *направляющей*).

Характерным признаком канонического уравнения цилиндра является то, что в уравнении отсутствует одна переменная.

Образующие цилиндра параллельны той оси, координаты которой нет в уравнении.

Направляющей цилиндра может служить любая кривая. Ниже рассмотрены такие цилиндрические поверхности, у которых направляющей является кривая 2-го поряка. В таблице представлены примеры эллиптического (кругового), гиперболического и параболического цилиндров с образующими параллельными оси OZ. Уравнение такой поверхности совпадает с уравнением его направляющей.

Для построения цилиндра необходимо построить сначала направляющую, на которую затем "натягивается" цилиндрическая поверхность так, чтобы ее образующая была параллельна соответствующей оси.

4.3.7. Построение поверхностей по каноническим уравнениям

При определении типа поверхности по данному уравнению необходимо установить:

1) имеет ли уравнение все три переменные,
2) имеются ли квадраты всех переменных,
3) одинаковые или разные знаки при квадратах,
4) одинаковые или разные коэффициенты при квадратах.

Если не выполняется 1-ое условие, т.е. в уравнении отсутствует одна переменная, то мы имеем дело с цилиндрической поверхностью, если не выполняется 2-ое условие, т.е. отсутствует квадрат одной переменной, то это поверхность является параболоидом и т.д.

• **1**. $x^2+y^2+z^2=2y+6z.$

Данное уравнение является уравнением сферы, на что указывает наличие квадратов всех переменных, одинаковые знаки и коэффициенты при них. Наличие в уравнении членов с первыми степенями y и z указывает на смещение центра сферы по осям OY и OZ. Приведем уравнение к виду

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

$x^2+(y^2-2y+1)-1+(z^2-6z+9)-9=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10.$

Центр сферы в точке $O'(0;1;3)$, радиус $r=\sqrt{10}$. (Рис.147.)

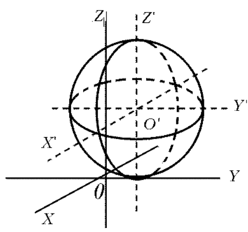


Рис. 147.

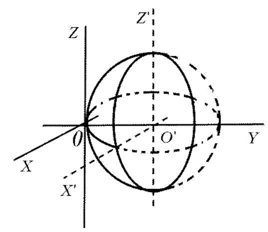


Рис. 148.

• **2**. $y=3-\sqrt{9-x^2-z^2}.$

Преобразуем уравнение

$$(y-3)^2=9-x^2-y^2 \;\Rightarrow\; x^2+(y-3)^2+z^2=9.$$

Данное уравнение является уравнением сферы с центром в точке $O'(0;3;0)$, радиусом $r=3$. Из условия имеем: $y\le 3$, поэтому исходное уравнение определяет только левую половину сферы. (Рис.148.)

• **3**. $6x^2+3y^2+4z^2=12.$

В данном уравнении имеем сумму квадратов всех переменных, но коэффициенты при квадратах разные, поэтому данное уравнение является уравнением эллипсоида. Для приведения его к каноническому виду разделим все уравнение на 12 и получим уравнение эллипсоида

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1$ с центром в начале координат и полуосями $a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{3}$. (Рис.149.)

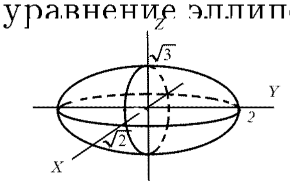


Рис.149.

• **4.** $z = \sqrt{4 - 3x^2 - 8y^2}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения и проведем необходимые преобразования
$z^2 = 4 - 3x^2 - 8y^2 \;\Rightarrow\; 3x^2 + 8y^2 + z^2 = 4 \;\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{4/3} + \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

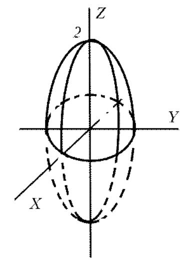


Рис.150.

Получили каноническое уравнение эллипсоида (в уравнении есть сумма квадратов всех переменных, коэффициенты при которых различные) с центром в начале координат и полуосями

$$a = 2/\sqrt{3}, \quad b = 1/\sqrt{2}, \quad c = 2.$$

Поскольку по условию задача $z \geq 0$, то исходное уравнение определяет только верхнюю половину эллипсоида (Рис.150.)

• **5.** $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8z$.

В уравнении есть сумма квадратов всех переменных, коэффициенты при квадратах разные. Данное уравнение - уравнение эллипсоида. Наличие члена с первой степенью переменной z указывает на смещение центра эллипсоида по оси OZ. Проведем необходимые преобразования

$$x^2 + 2y^2 + 4(z^2 - 2z) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2y^2 + 4(z-1)^2 = 4 \;\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(0;0;1)$ и полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ (Рис.151.)

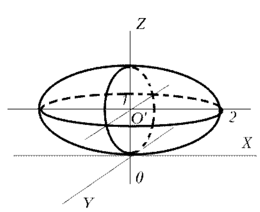


Рис. 151.

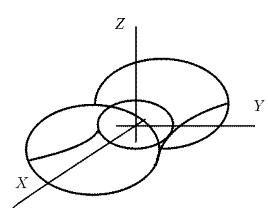


Рис. 152.

• **6**. $5x^2 - y^2 - 4z^2 + 20 = 0$.

В данном уравнении имеем квадраты всех переменных, но знаки при квадратах разные, поэтому данное уравнение является уравнением гиперболоида. Для приведения его к каноническому виду переносим свободный член в правую часть уравнения

$$5x^2 - y^2 - 4z^2 = -20.$$

В каноническом уравнении гиперболоида должен быть один знак "минус" в левой части уравнения. Меняем все знаки и делим все уравнение на 20

$$-5x^2 + y^2 + 4z^2 = 20, \qquad -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} + \frac{z^2}{5} = 1.$$

Это уравнение однополостного гиперболоида с осью симметрии OX (Рис.152.)

• **7**. $y = \sqrt{2x^2 + 3z^2 - 6}$.

Преобразуем уравнение $\quad y^2 = 2x^2 + 3z^2 - 6 \;\Rightarrow$

$$2x^2 - y^2 + 3z^2 = 6, \qquad \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Данное уравнение является уравнением однополостного гиперболоида с осью симметрии OY. Из условия имеем: $y \geq 0$, поэтому исходное уравнение определяет только правую половину гиперболоида (рис.153.)

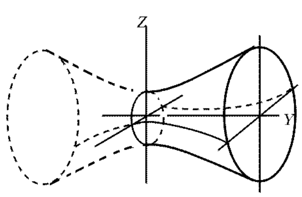


Рис. 153.

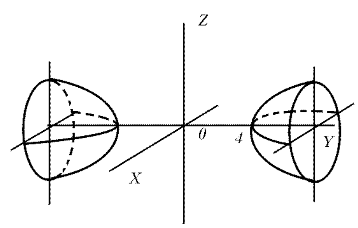


Рис. 154.

• **8**. $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 16 = 0$.

В данном уравнении имеем квадраты всех переменных, но знаки при квадратах разные, поэтому данное уравнение является уравнением гиперболоида. Переносим свободный
член в правую часть уравнения

$$4x^2 - y^2 + 2z^2 = -16, \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{8} = -1.$$

Это уравнение определяет двухполостный гиперболоид с осью симметрии OY (Рис.154.)

• **9**. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

В данном уравнении имеем квадраты всех переменных, но знаки при квадратах разные, поэтому данное уравнение является уравнением гиперболоида. В каноническом уравнении гиперболоида должен быть один знак "минус" в левой части уравнения. Меняем все знаки. Запишем уравнение в виде

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -1.$$

Оно определяет двухполостный гиперболоид с осью симметрии OX.

• **10**. $2x^2 = y^2 + \dfrac{z^2}{9}$.

В уравнении присутствуют квадраты всех переменных, запишем уравнение так, чтобы все они были в левой части уравнения

$$-2x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 0, \qquad -\frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 0.$$

Знаки при квадратах переменных разные, свободный член в уравнении отсутствует, поэтому это уравнение конуса с осью симметрии OX (Рис.155.)

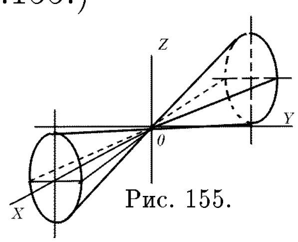


Рис. 155.

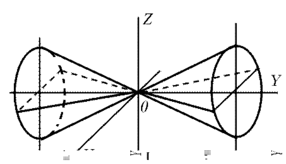


Рис. 156.

• **11**. $y^2 = 2(x^2 + z^2)$.

Преобразуем уравнение к виду

$$2x^2 + 2z^2 - y^2 = 0, \qquad \frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1/2} = 0.$$

В уравнении присутствуют квадраты всех переменных, знаки при которых различные свободный член равен нулю, поэтому это уравнение конуса с осью симметрии OY (Рис.156.).

• **12**. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=(z-1)^2$.

Запишем уравнение в виде $\quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{(z-1)^2}{1}=0.$

В уравнении присутствуют квадраты всех переменных, перед квадратом одной переменной знак "минус," свободный член равен нулю, поэтому это уравнение конуса с осью симметрии OZ. Вершина конуса в точке $O'(0;0;1)$ (Рис.157.)

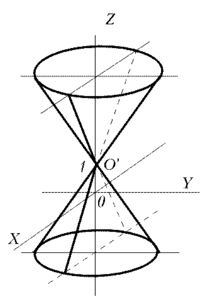


Рис. 157.

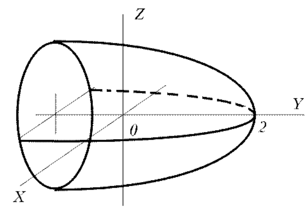


Рис. 158.

• **13**. $x^2+z^2+y=2$.

В данном уравнении переменная y содержится только в первой степени, поэтому оно определяет круговой параболоид (так как коэффициенты при x^2 и z^2 одинаковые) с осью симметрии OY. Запишем каноническое уравнение параболоида со смещенной вершиной

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm(y-y_0),$$

(квадраты переменных остаются в левой части уравнения, а в правую часть переносим переменную, стоящую в первой степени)

$$x^2+z^2=2-y, \quad x^2+z^2=-(y-2).$$

Из уравнения видно, что вершина параболоида смещена в точку $O'(0;2;0)$, а чаша параболоида направлена в отрицательном направлении оси OY, так как коэффициент перед y отрицательный (Рис.158.)

• **14**. $x=-(y^2+z^2)$.

В данном уравнении переменная x содержится только в первой степени, поэтому оно определяет круговой параболоид (так как коэффициенты при z^2 и y^2 одинаковые) с осью симметрии OX.

$$y^2+z^2=-x.$$

Из уравнения видно, что вершина параболоида в начале координат, а чаша параболоида направлена в отрицательном направлении оси OX, так как коэффициент перед x отрицательный.

• **15**. $3z = 1 - x^2 - 4y^2$.

В данном уравнении переменная z содержится только в первой степени, поэтому оно определяет эллиптический параболоид (так как коэффициенты при x^2 и y^2 разные) с осью симметрии OZ. Запишем каноническое уравнение параболоида со смещенной вершиной

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm(z - z_0).$$

$$x^2 + 4y^2 = 1 - 3z, \quad x^2 + 4y^2 = -3(z - 1/3).$$

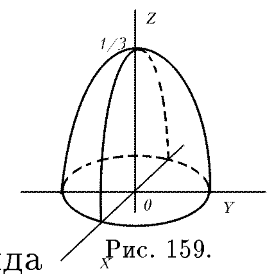


Рис. 159.

Из уравнения видно, что вершина параболоида смещена в точку $O'(0; 0; 1/3)$, а чаша параболоида направлена вниз, так как коэффициент перед z отрицательный (Рис.159.)

• **16**. $x = -1 + 5(y^2 + z^2)$.

В данном уравнении переменная x содержится только в первой степени, поэтому оно определяет эллиптический параболоид (так как коэффициенты при z^2 и y^2 разные) с осью симметрии OX. Запишем каноническое уравнение параболоида со смещенной вершиной

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm(x - x_0).$$

$$5(y^2 + z^2) = 1 + x, \quad 5(y^2 + z^2) = (x + 1).$$

Из уравнения видно, что вершина параболоида смещена в точку $O'(-1; 0; 0)$, а чаша параболоида направлена в положительном направлении оси симметрии, так как коэффициент перед x положительный.

• **17**. $x^2 + y^2 = 2z + 5$.

В данном уравнении переменная z содержится только в первой степени, поэтому оно определяет круговой параболоид с осью симметрии OZ. Запишем каноническое уравнение параболоида со смещенной вершиной $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \pm(z - z_0)$.

В исходном уравнении выносим за скобку коэффициент при z, получим

$$x^2 + y^2 = 2(z + 5/2).$$

Из уравнения видно, что вершина параболоида смещена в точку $O'(0; 0; -5/2)$, а чаша параболоида направлена вверх.

• **18**. $x^2 + z^2 = 2z$.

В данном уравнении отсутствует переменная y, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OY. Получим каноническое уравнение

$$x^2 + z^2 - 2z = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Итак, мы имеем уравнение кругового цилиндра, направляющей которого является окружность с центром в точке $O'(0; 0; 1)$ и радиусом $r = 1$. Строим эту окружность в плоскости XOZ и "вытягиваем" ее параллельно оси OY в цилиндрическую поверхность (Рис.160.)

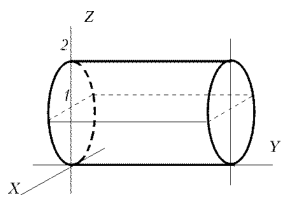


Рис. 160.

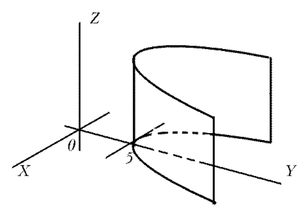


Рис. 161.

• **19**. $y = 5 + x^2$.

В уравнении нет переменной z, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OZ. Запишем уравнение в каноническом виде $x^2 = (y - 5)$. Из этого уравнения видно, что направляющей цилиндра является парабола с вершиной в точке $O'(0; 5; 0)$, осью симметрии OY и ветвями, направленными вправо. В плоскости XOY строим эту параболу и "вытягиваем" ее вдоль оси OZ в цилиндрическую поверхность (Рис.161.)

• **20**. $3z = 6 - y^2$.

В данном уравнении отсутствует переменная x, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OX. Получим каноническое уравнение

$$y^2 = 6 - 3z \;\Rightarrow\; y^2 = -3(z - 2).$$

Итак, мы имеем уравнение параболического цилиндра, направляющей которого является парабола с вершиной в точке $O'(0;0;2)$, ось симметрии которой параллельна оси OZ, ветви направлены вниз. Строим эту параболу в плоскости YOZ и "вытягиваем" ее параллельно оси OX в цилиндрическую поверхность (Рис.162.)

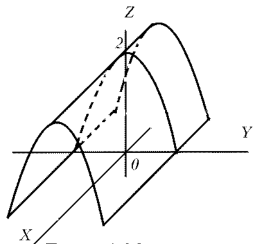


Рис. 162.

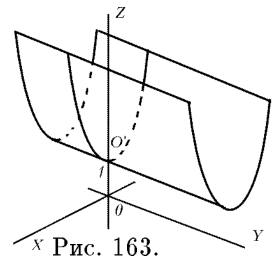


Рис. 163.

• **21**. $z = 1 + x^2$.

В уравнении нет переменной y, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OY. Запишем уравнение в каноническом виде $x^2 = z - 1$. Из этого уравнения видно, что направляющей цилиндра является парабола с вершиной в точке $O'(0;0;1)$, осью симметрии OZ и ветвями, направленными вверх. В плоскости XOZ строим эту параболу и "вытягиваем" ее параллельно оси OY в цилиндрическую поверхность (Рис.163.)

• **22**. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Преобразуем уравнение $y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

В данном уравнении отсутствует переменная z, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OZ. Направляющей является полуокружность (так как по условию $y \geq 0$) с центром в точке $O'(1;0;0)$, и радиусом $r = 1$. Строим эту кривую в плоскости XOY и "вытягиваем" ее параллельно оси OZ в цилиндрическую поверхность (Рис.164.)

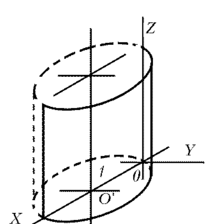


Рис. 164.

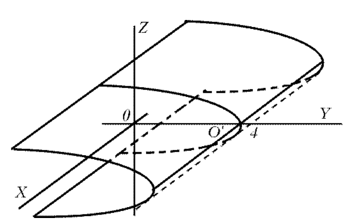


Рис. 165.

• **23**. $z=\sqrt{4-y}$.

Преобразуем уравнение $\quad z^2=4-y \;\Rightarrow\; z^2=-(y-4)$.

В уравнении нет переменной x, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OX. Направляющей цилиндра является верхняя половина параболы (так как по условию $z\geq 0$) с вершиной в точке $O'(0;4;0)$, осью симметрии OY и ветвями, направленными в отрицательном направлении оси OY. В плоскости YOZ строим эту кривую и "вытягиваем" ее параллельно оси OX в цилиндрическую поверхность (Рис.165.)

Задача Построить тело, ограниченное поверхностями

a. $\begin{cases} x^2+y^2=4y, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0 \end{cases}$ **b**. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=4-x^2-y^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$

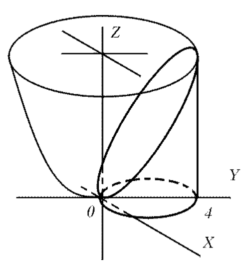


Рис. 166.

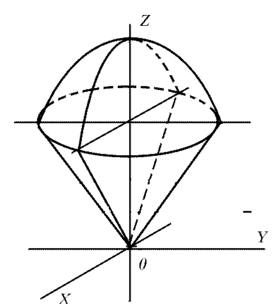


Рис. 167.

c. $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^2+1 \\ y+z=3 \\ z=0 \end{cases}$

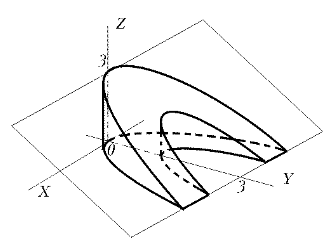
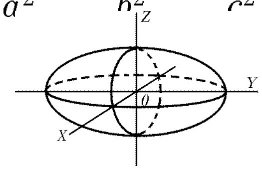


Рис. 168.

Таблица поверхностей 2-го порядка

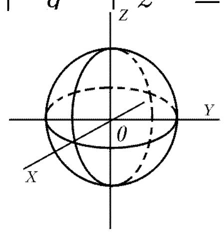
I. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



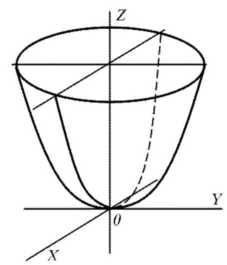
2. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



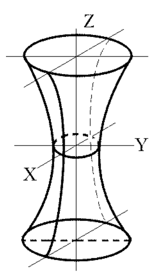
3. Параболоид эллиптический

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$



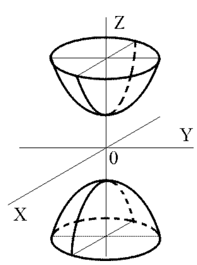
4. Гиперболоид однополостной

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



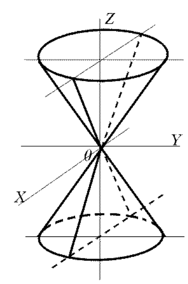
5. Гиперболоид двухполостной

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



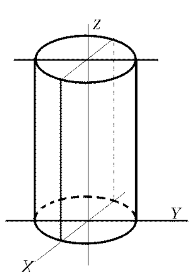
6. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



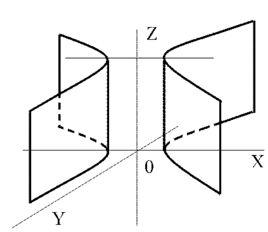
7. Цилиндр эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



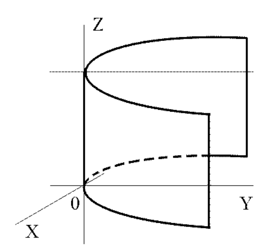
8. Цилиндр гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



9. Цилиндр параболический

$$y = x^2$$



СОДЕРЖАНИЕ